授業　（第5回，テキスト第3章後半に対応）

テキスト第3章は、引張（圧縮）に関する応用問題を解きます。

以下の2つを前回やりました.

①重力による棒の伸び，②不静定問題

今回は，

- **③熱による変形が加わる場合**

  このほかに，

- **疲労，応力集中　についても学びます**

テキスト第2章で学んだ内容が基礎になります.

繰り返しますが，覚えてほしい重要な式は以下の2つです.

- $\sigma = E \cdot \varepsilon$　（E：ヤング率、材料により決まった値となる。材料の引張試験で求められる. p17）

  この式を垂直応力（$\sigma = F/A$），垂直ひずみ,（$\varepsilon = \Delta L/L_0$)の定義により書きなおすと以下のようになります。

- $F/A = E \cdot \Delta L/L_0$（F：引張力、A：断面積、ΔL：変形量（伸び）、$L_0$：元の長さ）

  この式から変形量ΔLは以下のように求まります. ⇒　$\Delta L = F \cdot L_0 / (A \cdot E)$　（p17）

＜第3章の応用問題＞

引張に関する代表的な問題3つのうち，以下2つは前回やりました．

①重力による棒の伸び，②不静定である場合

---

③熱による変形が加わる場合

これに関するポイントは，

外力以外に熱によっても材料は伸び・縮みが生じます．

外力による変形のほか熱による変形の両方を求める必要があります．

今回は“疲労”や“応力集中”という概念も覚えてください．

材料は小さな応力でも繰り返し作用するといつか壊れます．

引張破壊は引張強さ以上の応力が作用してその際に破壊する現象ですが，

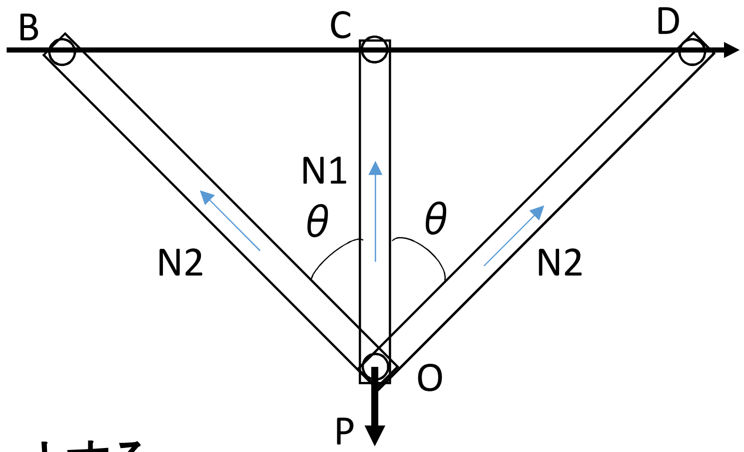
より小さな応力が繰り返し作用するとある回数で破壊するという現象が生じます（“疲労”という）．

最初に前回の不静定問題の復習をします　（テキストp36～p38に相当）

まず以下の問題を考えてください．

＜問＞右図のように3本の棒Aが点Oで結合され，点Oに荷重Pが作用している．各棒は両端をヒンジで結合されているため，**軸力**のみが作用する（このような構造を“**トラス**”という）．

各棒の軸力と点Oの変位を求めなさい．



棒OCの軸力をN_1, 棒OB，ODの軸力をN_2（対称なので同じ値），とする．

- 点OにおけるY方向の釣合い：　$N_1 + 2N_2 \cos\theta - P = 0$　　①
- モーメントの釣合い：式が立てられない．

というわけで，未知数2つに対して，式が1つしか立てられないので解くことができない．

すなわち**不静定問題**である．

前回やったように，**変位の条件**を考え，式を1つ追加してください．

この場合の変位の条件は何か？

（変位の条件は，ケースバイケースです．問題ごとに考える必要があります）

部材OB，ODの伸びをδ，部材OCの伸びをλとすると，

$$\delta = \lambda \cos\theta$$

となる．これがこの問題の変位の条件である．

これを軸力で表す必要があるので，以下を代入する．

$$N_1 = (EA/L\cos\theta) \times \lambda \qquad \text{(a)}$$

$$N_2 = (EA/L) \times \lambda\cos\theta$$

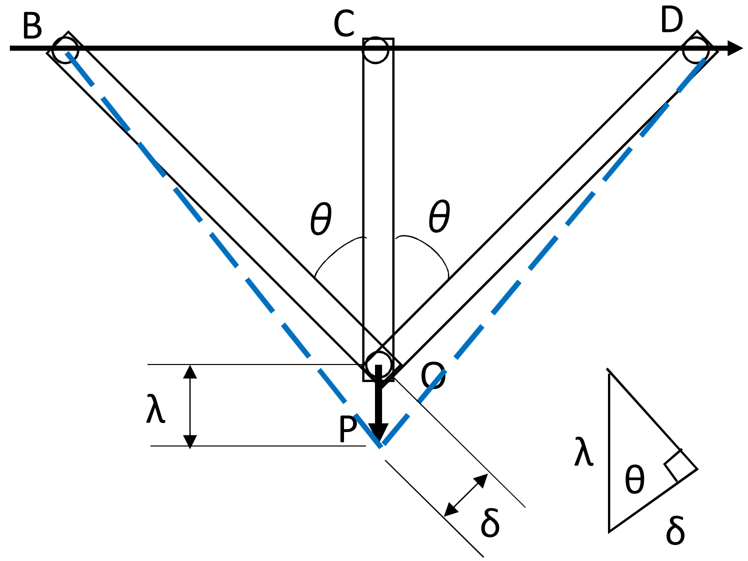
即ち， $(EA/L)\,\lambda\,(1/\cos\theta + 2\cos^2\theta) = P$ ②

①，②を連立すると，N_1,N_2が求められる．

求められたN_1を(a)に代入すると，O点の変位が求められる．

$$\lambda = PL\cos\theta / [EA(1+2\cos^3\theta)]$$

（注）このような問題はよく出るので（代表的な問題），よく理解してください．



変形後の状態

対称性から，点Oは下に変位する（λ）．
なお，変形後も2本の棒のなす角度はθを保持するものとしている．

1. 熱ひずみと熱応力 （今回新たにやるテーマです，テキストp32～p34）

温度変化によっても材料は伸び・縮みする．この場合のひずみを**熱ひずみ**という（記号：ε_T とする）．

$$\varepsilon_T = \alpha \cdot \Delta T \quad \text{（}\Delta T\text{によって単位長さの棒が伸びる量はこの値となる）} \qquad (1)$$

ここで，α は材料固有の定数で，**熱膨張係数**という．ΔTは温度差である．
α は材料の物性表を使ってください．$\alpha = \varepsilon_T / \Delta T$　なので単位は[1/K]（K:ケルビン）となります．
（注：歪は無次元量）

長さLの棒が温度差ΔTによる変形量λ_Tは，式（1）に長さLを掛けて，

$$\lambda_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L \qquad (2)$$

荷重Fによって，長さLの棒が伸びる量は，
$F/A = E \cdot \Delta L / L$（F：引張力、A：断面積、$\Delta L$：変形量（伸び）、L：元の長さ）から，

$$\Delta L = F \cdot L / (A \cdot E) \qquad (3)$$

したがって，荷重Fと温度差ΔTが同時に作用したときの伸びは，

$$\Delta L + \lambda_T = F \cdot L / (A \cdot E) + \alpha \cdot \Delta T \cdot L \qquad (4)$$

熱応力

右図のように水平に置かれた棒に温度差ΔTが作用する場合を考えてください.
もしも片側がフリーならば，棒はλ_T伸びることになります.

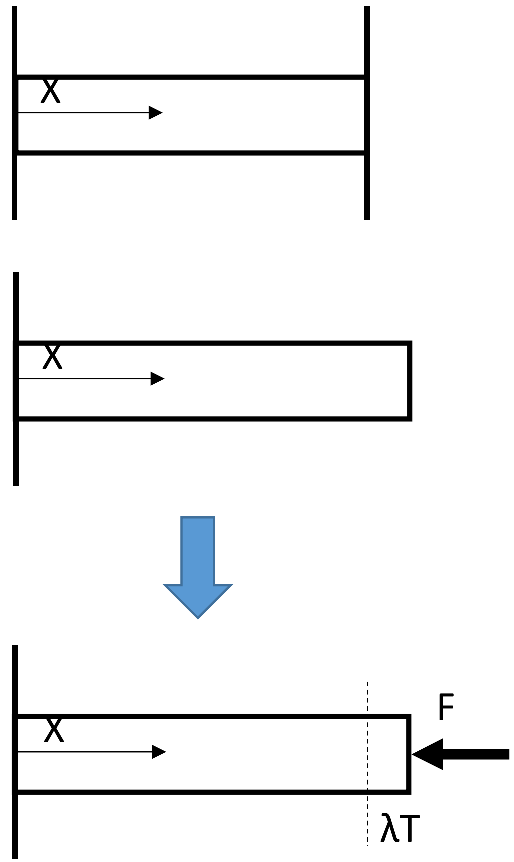
しかし両端固定されているので伸びることができません.
この状態では，棒は壁から圧縮力Fを受けてλ_Tだけ縮められています.

即ち，　$F \cdot L/AE = -\lambda_T$
これを書き直すと,

$$\sigma \cdot (L/E) = -\alpha \Delta T \cdot L$$

即ち

$$\sigma = -E \cdot \alpha \Delta T$$



このように温度差によって発生する応力を熱応力といいます.
(注)熱応力は，伸びられないように両端が固定されている場合に生ずる.

次に熱変形に関する基礎的な問題を解きます.（理解度確認用問題）

(a) 棒の熱変形

長さ1mの棒がある. 温度を30 ℃高めた場合の伸びを求めなさい.

但し, 熱膨張係数(α)を11×10^{-6} (1/K)とする.

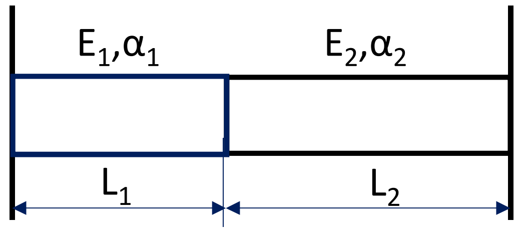
(b) 棒の熱応力

長さ1mの棒があり, 両端が固定されている. 温度を30 ℃高めた場合の熱応力を求めなさい.

但し, 熱膨張係数(α)を11×10^{-6} (1/K)とする.

(c) 棒の熱応力

長さL_1, L_2の棒(断面積はともにA)が直列に接続され, 両端が固定されている. 温度をΔT高めた場合の熱応力を求めなさい. 但し, 熱膨張係数をそれぞれα_1, α_2, ヤング率をそれぞれE_1, E_2とする.



＜解答＞

(a) 長さ1mの棒がある．温度を30 ℃高めた場合の伸びを求めなさい．

但し，熱膨張係数（α）を11×10^{-6} (1/K)とする．

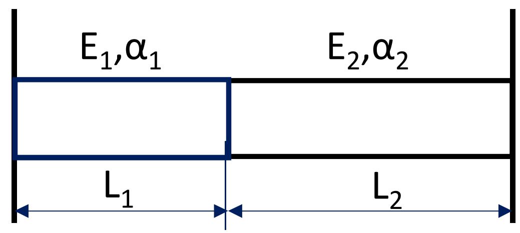
$$\lambda_T=\alpha\Delta TL= 11\times10^{-6}\times30\times1=3.3\times10^{-4}\ \text{(m)}\ \text{(0.4 mm)}$$

(b) 長さ1mの棒があり，両端が固定されている．温度を30 ℃高めた場合の熱応力を求めなさい．但し，熱膨張係数（α）を11×10^{-6} (1/K), ヤング率を210 GPaとする．

$$\sigma_T=E\cdot\alpha\cdot\Delta T=210\times10^{9}\times11\times10^{-6}\times30=6.93\times10^{7}\ \text{(Pa)}=69.3\ \text{(MPa)}$$

(c) 長さL1, L2の棒（断面積はともにA)が直列に接続され，両端が固定されている．温度をΔT高めた場合の熱応力を求めなさい．但し，熱膨張係数をそれぞれα_1，α_2 (1/K), ヤング率をそれぞれE_1, E_2とする．

（これはレポートNo.5　とします）



＜まとめ＞　熱膨張と熱応力　（テキストp32～p34）

- **熱ひずみ**　$\varepsilon_T = \alpha \cdot \Delta T$

- **伸び**　$\varepsilon_T L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$

- **熱応力**　$\sigma = -E \cdot \alpha \Delta T$

（注）温度差がマイナスならば，両端固定の棒には引張応力が生ずる.

$$\sigma = E \cdot \alpha \Delta T$$

外力も作用していれば，熱応力＋外力による応力　となる.

重ね合わせの原理を使い，

それぞれが単独に作用した場合の値を求め，和を取ること.

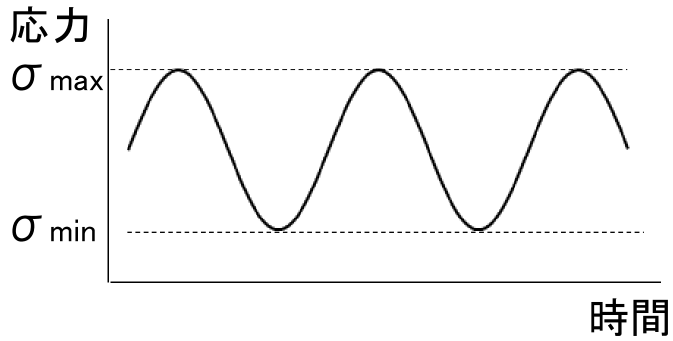
2.　疲労　（テキストp41～p42）

材料は引張強さ以上の応力が作用すると，その場で破壊します.

しかし，小さな応力でも繰り返し作用するといつか壊れます.

この応力が繰り返し作用するとある回数で破壊するという現象を疲労といいます.

（針金を繰り返し曲げる場合などにも見られる）



- 応力振幅

  右図において（$(\sigma_{max}-\sigma_{min})/2$

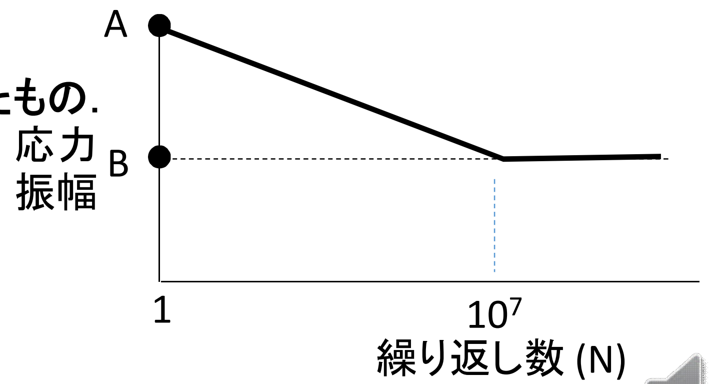
- S-N線図

  縦軸に応力振幅，横軸にその応力振幅で壊れるまでの繰り返し数を表したもの.

  鋼の場合，右のような関係が得られる.

  （Aは引張強度） Bの応力を疲労限度という.

  疲労限度以下の応力ならば，何回繰り返しても壊れないと考えてよい.



S-N線図

3. 応力集中 （テキストp39）

- 局所的に応力が大きくなることを応力集中という.

  下図左のような場合には応力集中は発生せず，下図右のような場合には応力集中が発生する.

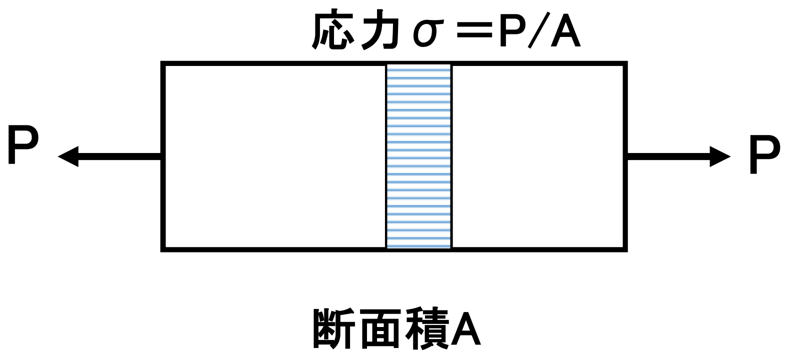
  具体的には，穴が開いている板，段付きの棒，周囲に切欠きが存在する板や棒などである.

- このような場合は，

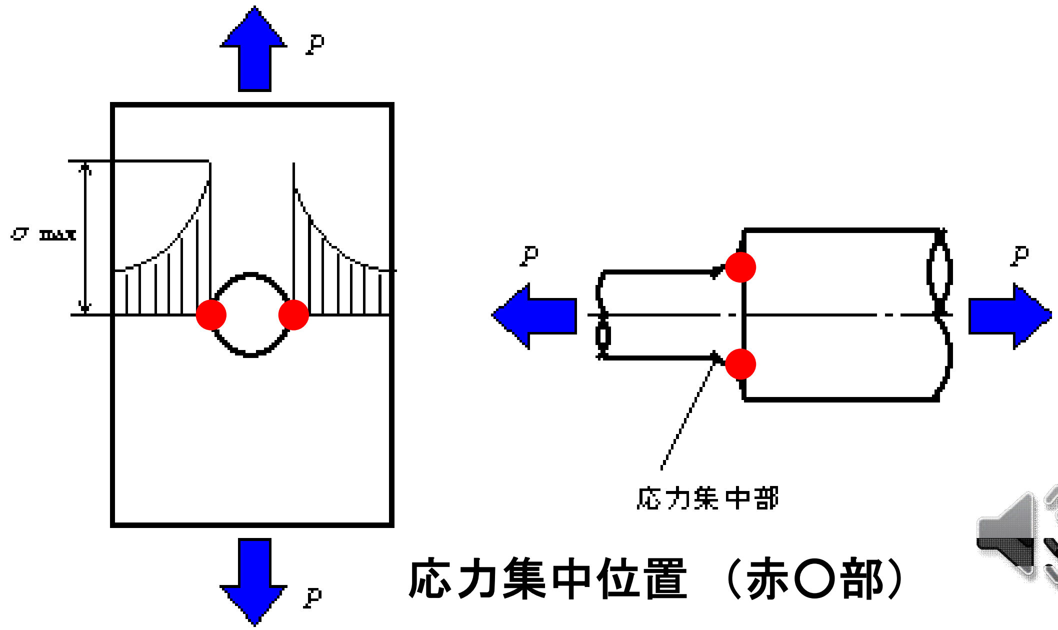
  材料力学で求めた応力（平均応力）に応力集中係数Kをかけた値で応力を評価する.

  Kは形状（穴や切欠き，段など） およびそのサイズにより変化する.

  Kはデータベースから調べること.



応力集中のない均一な応力分布



応力集中位置（赤〇部）