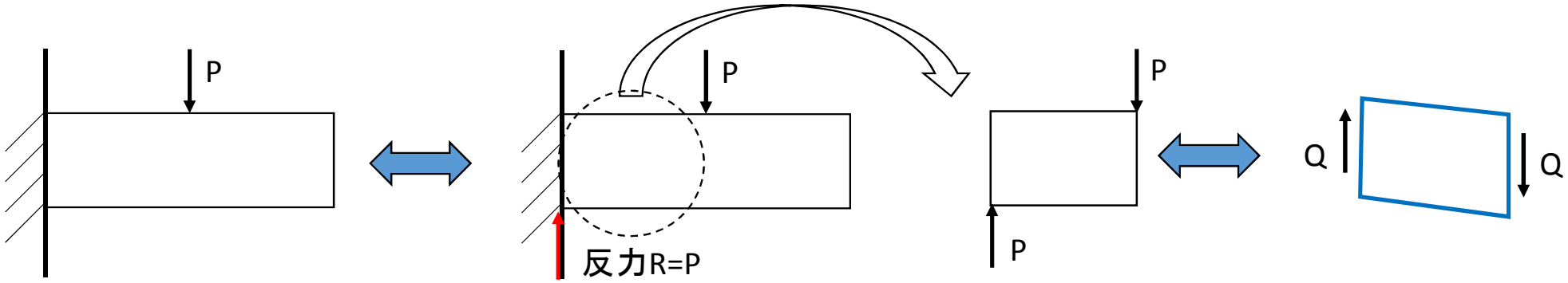
材料力学Ⅰ（第7回，6/5）（テキスト第4章）

復習

- **せん断力**：断面をずらすような軸に垂直方向に作用する力をいう．

  例　カッターやハサミで断面を切断するような力，刃物で輪切りをするような力



せん断荷重の作用
（軸と垂直方向の力Fy）

物体に作用する力
（反力も含む）

物体に微小領域に作用する力（左）と
せん断力による変形（右）
（注）断面に作用する内力はQで表示する（Q=P）

- 断面積をAとすると，断面に作用する応力はQの方向で，

  $\tau = Q/A$

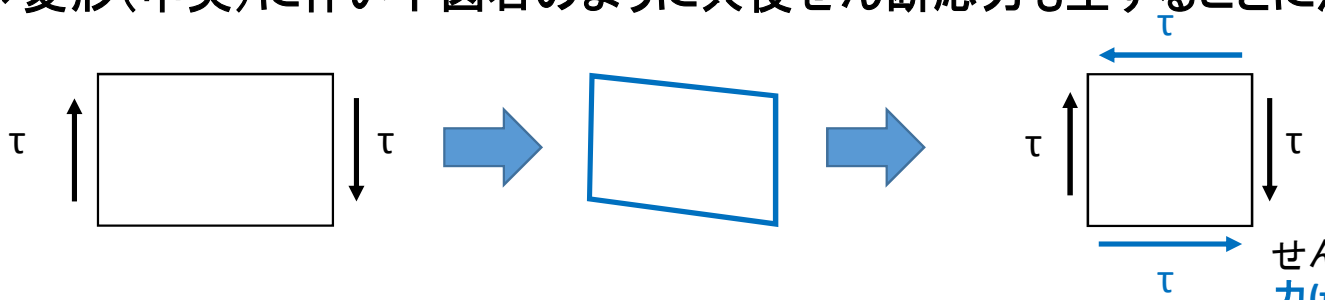
  これを**せん断応力**という（記号：τ(タウ)）

（復習） せん断応力の性質 （テキストp48～49）

- 共役せん断応力

下図（左）のようにY方向のせん断応力だけでは，回転モーメントが釣合わない．

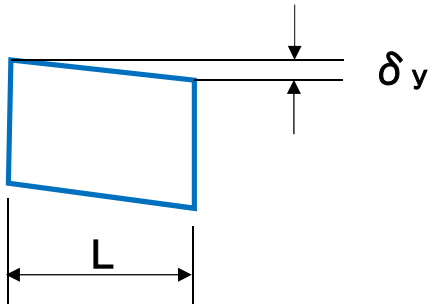
⇒変形（中央）に伴い下図右のように共役せん断応力も生ずることに注意．



せん断変形に伴い共役せん断応力(τ)も生ずることに注意

- せん断ひずみ

$\gamma = \delta y / L$



元の物体はひし形のような形状に変形する

（長さLの物体がY方向にδy変形した場合）

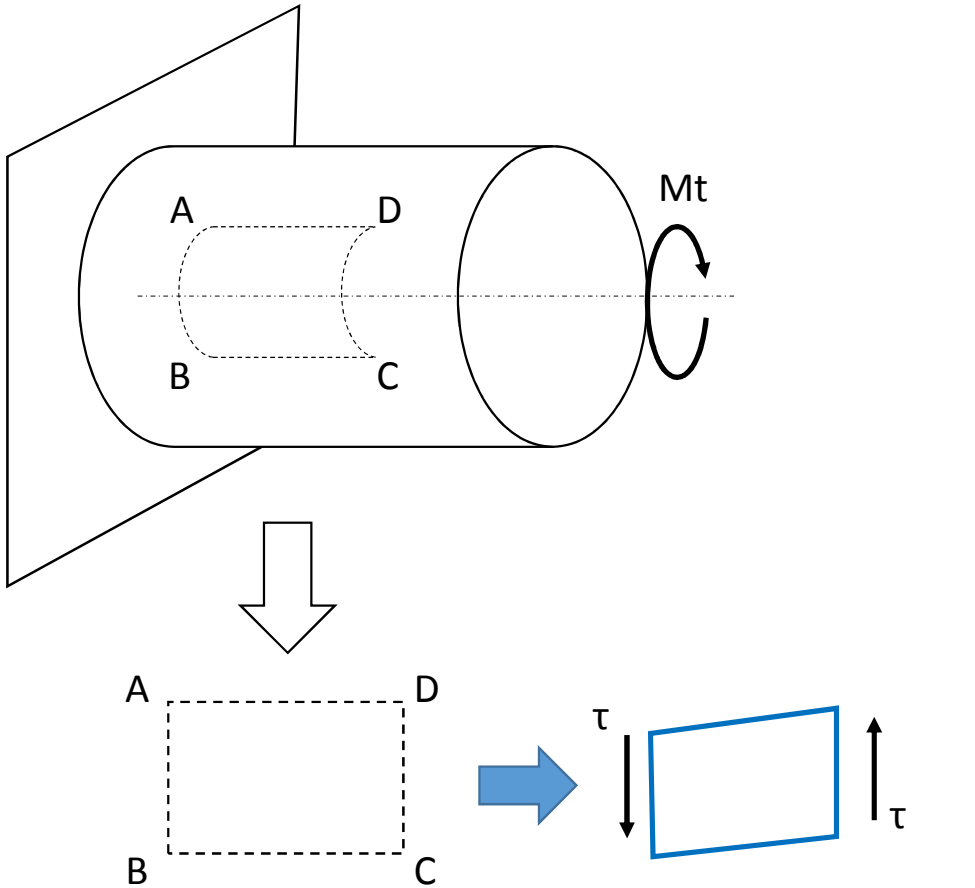
- 横弾性係数

$\tau = G\gamma$　せん断ひずみとせん断応力は比例する．比例定数Gを横弾性係数という．

（注）軸力と伸びの場合はヤング率（縦弾性係数）といった．　$\sigma = E\varepsilon$ のヤング率に相当するもの．

（本日の内容のイントロ）

「ねじりによってもせん断変形は生ずる」



（注）図では示していませんが，
共役せん断応力も発生します．

ねじりモーメントMtによって円筒はねじれる．
このときの変形を外周において考えると，

微小領域ABCDの長方形は，
下図（右）のようにひし形に変形する．
（消しゴムなどで試してみてください）

即ち，せん断変形が生ずる．
円周面の微小領域では図のようにせん断応力が生ずる．

※せん断変形は（せん断力だけでなく），
ねじりモーメントによっても生ずる
ことを理解してください．

実際に機械の動力源はモーターなどの回転型であり，伝動軸によって動力が伝達されるので回転軸のせん断強度は重要である．
以降では，ねじりモーメントによって生ずるせん断応力やねじれ角を調べます．

テキストp50 **4.2 中実丸棒のねじり** **（本日の内容はここから）**

（1） 棒に生ずるねじり変形

図のような中実（内部が空洞でない）丸棒があり，下端を固定し，上端にねじりモーメントTを与えるとする．

まず棒にはどのような変形が生ずるかを考えてください．

答えは，下記のテキストの（1）および（2）となります．

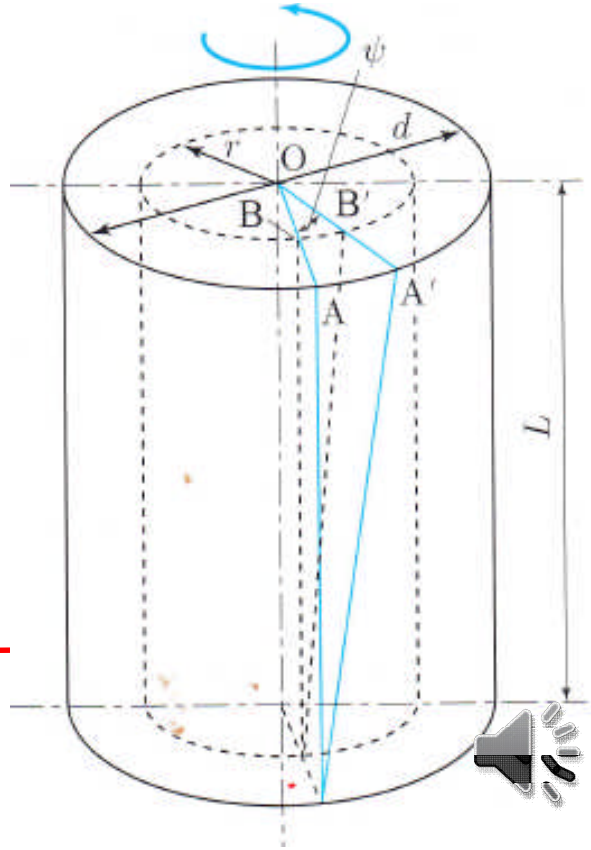
（これは近似ではありますが，現象をほぼ正確に表しています）

まずねじりによる変形状態を把握する

図 4.4 のような直径 d (半径 $r_0 = d/2$) の円形断面をもつ長さ L の中実軸を考える．その両端を円周方向に沿ったトルク T でねじると，あるいは中実軸の一端を固定し他端に T を作用させてねじると，軸の内部に**ねじりモーメント** M_t (twisting moment) および，**ねじれ角** ψ (angle of twist) が生じる．ねじりを受ける棒を**軸** (シャフト，shaft) と呼ぶ．ここで，円形や円筒の断面を有する軸では，次のような変形が生じると仮定できる．

(1) 軸の断面は，ねじられた後も，変形前と同じ円形を保ち，かつ平面のままである．

(2) 円形断面上の半径方向に引かれた直線は，変形の後も直線のままで長さは変わらない．したがって，横断面は剛体のように回転するものと考える．



（2）ねじりによる変形状態　（テキストp50）

次にねじりによる変形状態を式で表す

ねじりモーメントTによって，半径OBはOB‘に変化する．

角∠BOB’をねじれ角（ψ）という．

OB＝rとすると，BB‘＝rψとなる．

せん断ひずみの定義により，$\gamma = r\psi / L$　と表せる．

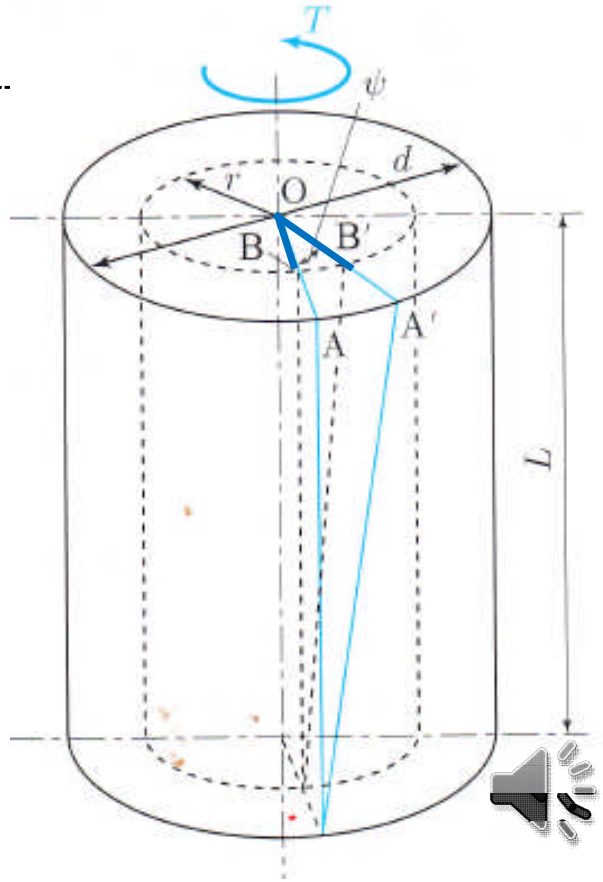
---

(1) と (2) の仮定により，ねじりモーメントによって軸上面の半径 BO は直線のままで回転して B′O となり，軸下面に対して軸全長で ∠ BOB′ の角度変化が生じる．この角度変化をねじれ角 ψ とする．このとき，軸に垂直な断面間の距離を L とすると，軸の中心から半径 r の要素に生じるせん断ひずみ γ は，

$$\gamma = \frac{r\psi}{L} \tag{4.5}$$

となる．ここで，単位長さあたりのねじれ角を**比ねじれ角** θ (angle of twist per unit length) として次のように，

$$\theta = \frac{\psi}{L} \tag{4.6}$$



- **せん断ひずみの性質**　　（テキストp51）

せん断ひずみの定義により，$\gamma = r\psi / L = r\ \theta$ と表せる.

この式から
せん断ひずみは半径rに比例することがわかる.
最大値は外周に生ずる. また中心では0である.
即ち，　　$\gamma_{max} = r_0\ \psi / L$

せん断ひずみの分布は右図のようになる.

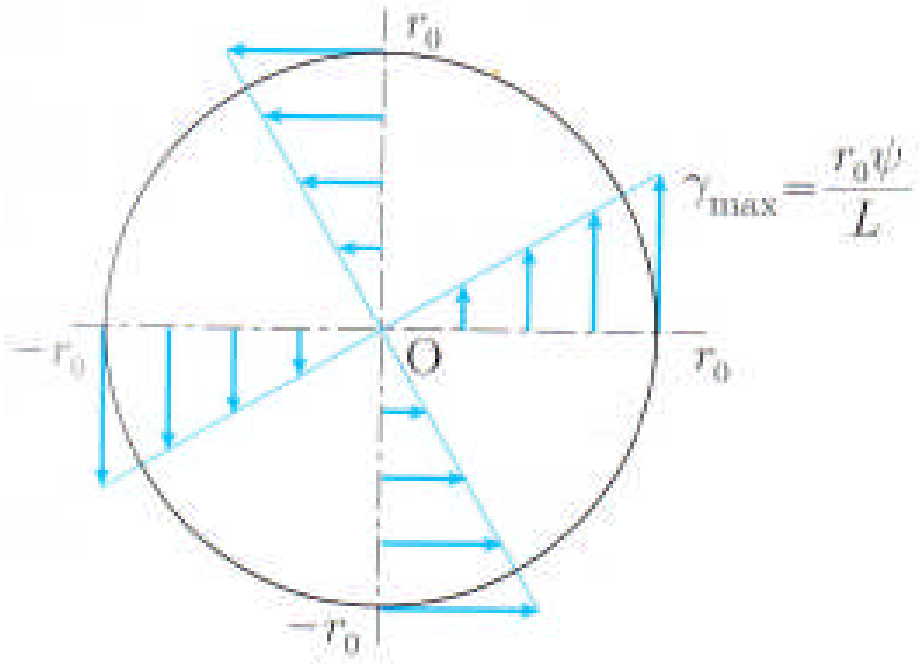


図 4.5　せん断ひずみ分布

外周で最大，中心では0

- **せん断応力の性質**

せん断ひずみから，せん断応力を求めることができる.
$\tau = G\ \gamma$　であるから，

$$\tau_{max} = G\ \gamma_{max}$$

せん断応力は，せん断ひずみに一定値（G）を掛けたものであるから，
せん断応力の分布は，右上図と同じである.
（値は，γ にGを掛けた値）

(3)せん断応力を外力Tによって表す　(テキストp51)

実際の問題では，トルクTが与えられます．次に応力や歪を求めます．

この順：外力T⇒生ずる応力を求める⇒ひずみを求める．

モーメントの釣り合いを考えます：　せん断応力×面積×腕の長さの和(積分)＝モーメント．

せん断応力や腕の長さは半径rの関数なので，総和はrで積分します．

次に，図 4.6 のように，半径 r，微小長さ dr のリングの領域を考え，リングに作用するせん断応力 τ により，中心軸まわりに発生するねじりモーメント dM_t を考えると

リングの面積：円周2πr×幅dr

$$dM_t = r\tau\, dA = r \times Gr\theta \times 2\pi r\, dr = 2\pi G r^3 \theta\, dr \qquad (4.10)$$

となる．全断面にわたるねじりモーメント M_t は，上式を積分して

$$M_t = \int_0^{\frac{d}{2}} dM_t = 2\pi G\theta \int_0^{\frac{d}{2}} r^3\, dr = G\theta \times 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} r^3\, dr = G\theta I_p \qquad (4.11)$$

Mt＝G・θ・Ip

ここで，I_p を断面二次極モーメント (polar moment of inertia of area) と呼ぶ．直径 $d = 2r_0$ の中実軸の I_p は

円ならばこの値となる

(Ipの定義)
微小な面積dAに半径の2乗を掛けたものの総和

$$I_p \left(= \int r^2\, dA \right) \qquad I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r_0^4}{2} \qquad (4.12)$$

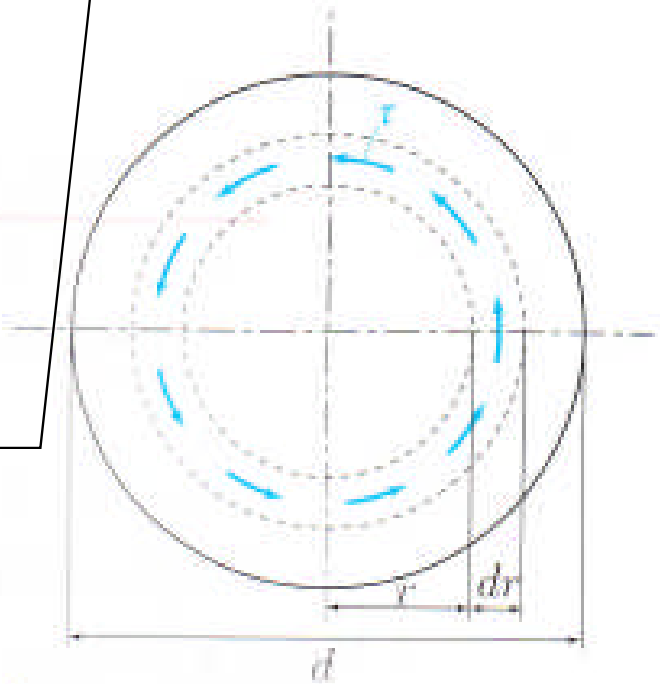


図 4.6　軸に垂直な断面の作用応力

(4)外力Mtによって発生するせん断応力τ，ねじれ角ψを求める （テキストp52）

Mt＝G・θ・Ip

$$\theta = \frac{1}{GI_p} M_t = \frac{32}{\pi G d^4} M_t \qquad (4.13)$$

ここで，GI_p をねじり剛性 (torsional rigidity) と呼ぶ．これは，単位の比ねじれ角を生じさせるのに必要なトルクの大きさを表している．

単位長さあたりのねじれ角 θ がわかったなら，長さ L の軸全長にわたるねじれ角 ψ は

$$\psi = L\theta = \frac{LM_t}{GI_p} = \frac{32LM_t}{\pi G d^4} \qquad (4.14)$$

となる．

半径 r の位置におけるせん断応力は式 (4.9) より，

$$\tau = Gr\theta = \frac{M_t}{I_p} r \qquad (4.15)$$

式 (4.15) より，せん断応力は半径に比例して大きくなり，最大せん断応力 $\tau_{\max}$ は外周 $r_0 = d/2$ で生じ，その大きさは

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p}\frac{d}{2} = \frac{M_t}{Z_p} \qquad (4.16)$$

ここで Z_p は極断面係数 (torsional modulus of section) と呼ばれ，中実軸の場合は

$$Z_p = I_p \Big/ \frac{d}{2} = \frac{\pi d^4}{32}\frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{16} \qquad (4.17)$$

Mt＝G・θ・Ip

ψ＝Lθ＝ L・Mt/(G・Ip)

$\tau_{max} = \frac{Mt}{Ip} \times \frac{d}{2}$

この3つの式は必ず覚えること

理解度確認問題　（テキストp52）

[例題 4.3]

直径 30 mm の円形断面をもつ中実軸に，500 N·m のねじりモーメントが作用している．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　断面二次極モーメントを求めよ．

(2)　極断面係数を求めよ．

(3)　軸に生じる最大せん断応力を求めよ．

[解]　(1)　断面二次極モーメントは

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times (30)^4}{32} = 7.95 \times 10^4 \ [\mathrm{mm}^4]$$

式4.12
中実丸棒の場合の式

(2)　極断面係数は

$$Z_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \times (30)^3}{16} = 5.30 \times 10^3 \ [\mathrm{mm}^3]$$

(3)　最大せん断応力は

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{Z_p} = \frac{500 \times 10^3}{5.3 \times 10^3} = 94.3 \ [\mathrm{N/mm^2}] = 94.3 \ [\mathrm{MPa}]$$

式4.16，17

（注）
Mt＝G・θ・Ip

この式は曲げモーメントとθは比例関係であることを示している．

その比例定数G・Ipは
θ＝Mt/（G・Ip）より，
ねじりモーメントMtによりどれだけねじれるかを示している．

G・Ipの値が大きいほどねじれ角は小さく，G・Ipをねじれ剛性という．

(5) 中空丸棒　（テキストp53～p56）

式4.15により，せん断応力は中心で0，外周で最大となる．

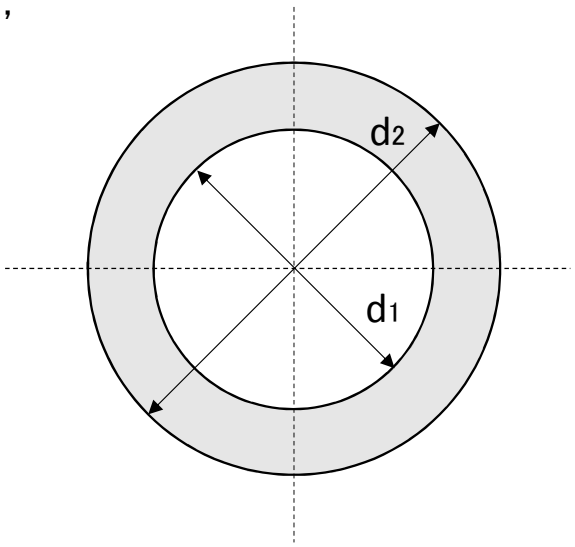
$$\tau = \frac{Mt}{Ip} \times r$$

したがって，中央部は外力のモーメントMtに対する抵抗力が作用しないため，

中空化すると，モーメントによる変形はあまり増加せず，

軽量な軸とすることができる．

実際に，回転軸は中空化されたものが多い．



中空化した円形軸

図のように外径d_2，内径d_1の中空軸を考える．

この場合もねじり変形は前のスライドで述べたように，

断面は平面（円形）を保ち，単に回転変位を生ずるのみである．

この場合のねじれ角やせん断応力はどのようになるか？

結果を次のスライドに示す．

中空丸棒に生ずるねじれ角，せん断応力

- 曲げモーメントとねじれ角の関係

$$Mt = G \cdot \theta \cdot Ip'$$

- 曲げモーメントによって生ずるねじれ角

$$\psi = L \cdot Mt / (G \cdot Ip')$$

- 曲げモーメントによって生ずるせん断応力

$$\tau = \frac{Mt}{Ip'} \times r$$

以上は前に出てきた式とほぼ同じで，違いは，Ip ⇒ Ip’となっているのみである．

Ip’を用いることのみ注意！

ではIp’はどのように求めればよいか？

Ip’は，中実のIpから中空部に相当するIpを引いた値となる．

即ち，　$Ip' = \pi d_1^4/32 - \pi d_2^4/32$

（注）丸棒のIpは$\pi d^4/32$である．外径をd_1，内径をd_2とすると，上の式の第１項は全体のIp，第２項は中空部のIpである．

（理解度確認問題）

＜ポイント＞

まず中実と中空の場合のせん断応力とねじれ角を求められるようにしてください．

さらに中空化による軽量化とせん断応力やねじれ角の変化の関係から，中空化の意義を考察すること．

問　長さ2 m，外径d2 = 80 mmの中実丸棒と，外径d_2 = 80 mm，内径d_1 = 60 mmの中空丸棒がある．これらにねじりモーメント4000 Nmを加える．2つの棒の横弾性係数Gを80 GPaとする．

（1）各棒に生ずる最大せん断応力τ_{max}を求めなさい．（最大値は外周で生ずる）

（2）各棒に生ずる比ねじれ角θを求めなさい．

（3）各棒の全長におけるねじれ角ψを求めなさい．

（注）2つの棒の質量比は断面積の比となる（この場合，中空化で質量は半分弱となる）

求めた結果を以下の表にまとめて，質量比とねじれ角の比および最大せん断応力の比から中空化の有効性を考察しなさい．

	質量	ねじれ角 (rad)	最大せん断応力 (MPa)
中空	―		
中実	―		
比（中空/中実）	0.44		