

## 材料力学 I (第15回, 7/31) 前期まとめ

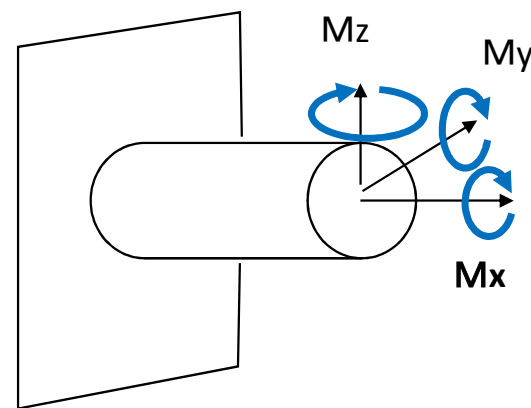
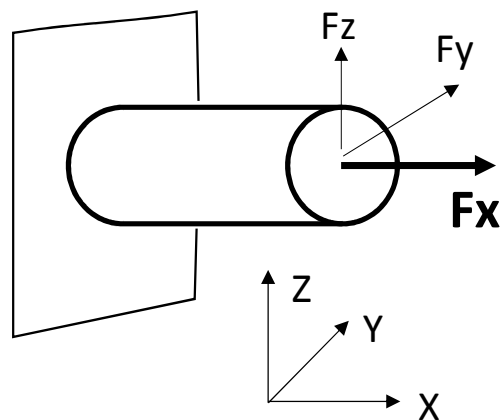
### 荷重と変形

力は任意の方向に存在しますが, **XYZ方向に分解**して考えてください.

- 下図において, **X成分(軸力)**により**引張・圧縮**,  
**YまたはZ成分**により**せん断と曲げ**が生じます.
- モーメントによって回転に関連した変形が生じます.

**$M_x$ :ねじり,  $M_y$ :曲げ,  $M_z$ :曲げ**

(注)力はモーメントも併せて最大6個しか存在しません: $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$   
したがって, すべての変形形態は, **引張・圧縮, せん断, ねじり, 曲げ**です  
これだけですので, よく覚えてください.



(復習)

## 1. 引張, 圧縮 (テキスト第2, 3章)

(1) 応力とひずみの関係  $\sigma = E \cdot \varepsilon$

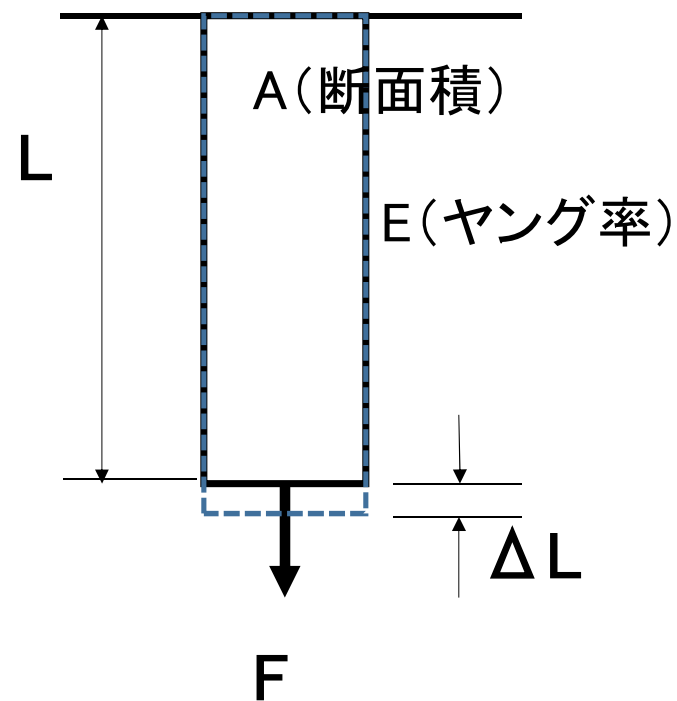
この式は, 垂直応力, 垂直ひずみの定義により  
以下の様に表すことができる.

$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L_0} \quad (\text{レポートNo3})$$

(応力)                      (ひずみ)

したがって, 荷重Fによる棒の変形量 $\Delta L$ は,

$$\Delta L = \frac{F \cdot L_0}{A \cdot E}$$

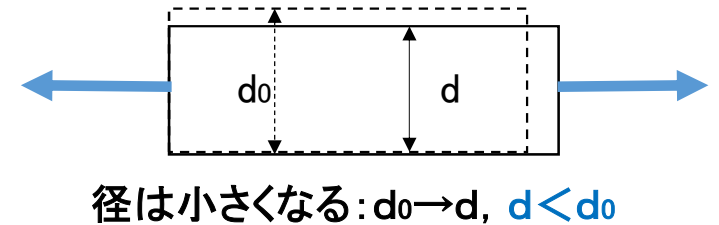


## (2) 横ひずみとポアソン比

棒を軸方向に荷重を与えて引張った時に、軸方向には伸びますが、直径方向には小さくなります。(下図で、元の径 $d_0$ は $d$ になり、 $d < d_0$ )

このとき、 $\varepsilon' = (d - d_0) / d (< 0)$  を横ひずみという。  
横ひずみ  $\varepsilon'$  と縦ひずみ  $\varepsilon$  の比をポアソン比という。

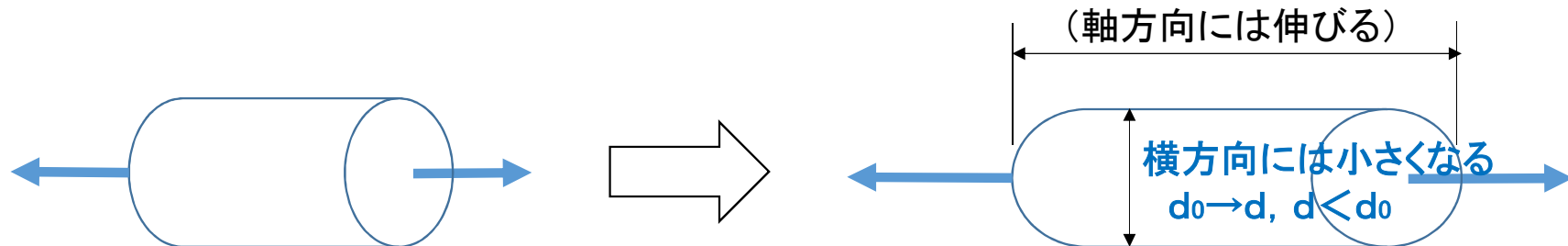
$$\text{ポアソン比 } \nu = | \varepsilon' | / \varepsilon$$



(注)横ひずみの絶対値を取っている理由は、ポアソン比を正の値とするため。

ポアソン比もヤング率と同様に材料固有の値(材料定数)です。

金属では約0.3, プラスチックは約0.4, ゴムでは0.4~0.5です。ポアソン比は0.5を超えることはありません。



### (3) 引張試験

以下は応力-ひずみ線図のどの位置に関するものかを把握する。

- (1) 弾性域および塑性域
- (2) ヤング率
- (3) 降伏点(弾性限度)
- (4) 引張強さ

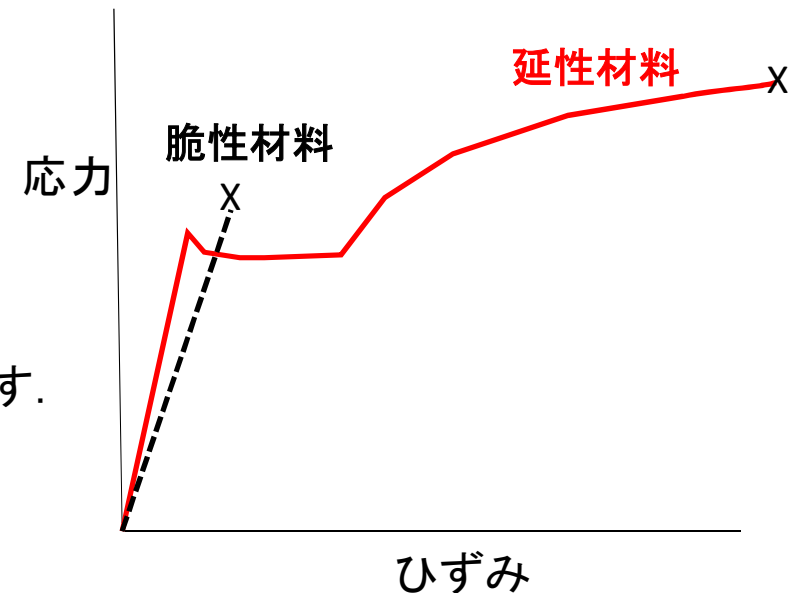
金属材料は応力-ひずみ線図における塑性域が大きい。

このように大きな塑性変形を生ずる材料を**延性材料**といいます。

**金属は延性材料**(但し、**鋳鉄は脆性材料**)

**鋳鉄、セラミクス、ガラス、コンクリートなどは脆性材料**、

**脆性材料は塑性変形することなく、弾性域をこえるとすぐ破断する。**



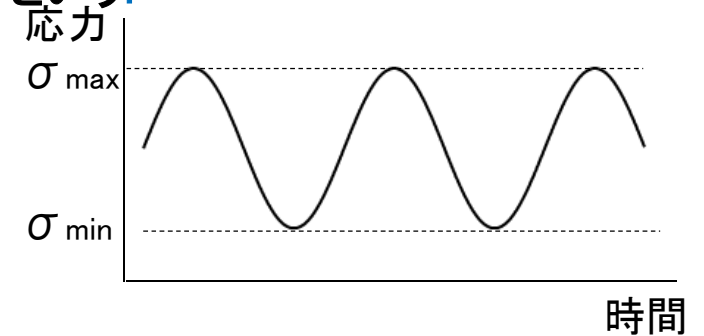
#### (4) 疲労 (テキストp41~p42)

小さな応力でも繰り返し作用するといつか壊れます。

この応力が繰り返し作用するとある回数で破壊するという現象を**疲労**という。

(針金を繰り返し曲げる場合などにも見られる)

応力振幅 :  $(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$



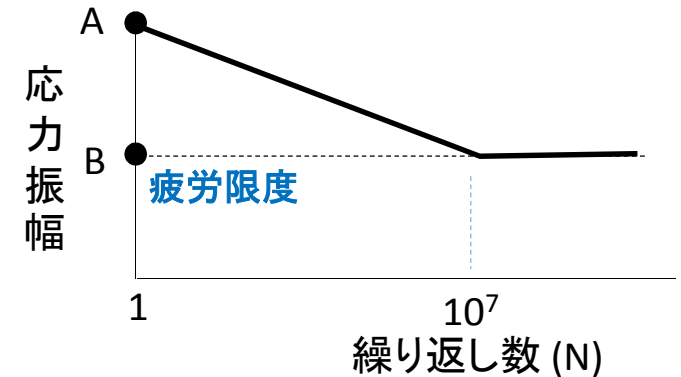
#### • S-N線図 (S: Stress, N: Number)

縦軸に応力振幅, 横軸にその応力振幅で壊れるまでの繰り返し数を表したもの。  
鋼の場合, 右のような関係が得られる。

Bの値を**疲労限度**という。(注)Aは引張強度)

疲労限度以下の応力ならば, 何回繰り返ししても壊れないと考えてよい。

(繰り返し応力が作用する場合は, 許容応力は疲労限度とする)



S-N線図



## (5) 応力集中 (テキストp39)

- 局所的に応力が大きくなることを応力集中という。

下図左のような場合には応力集中は発生せず, 下図右のような場合には応力集中が発生する。

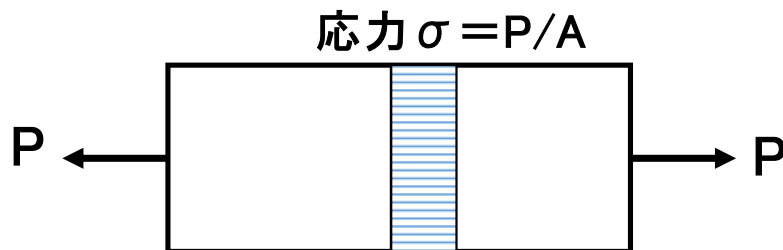
具体的には, 穴が開いている板, 段付きの棒, 周囲に切欠きが存在する板や棒などである。

- このような場合は,

材料力学で求めた応力(平均応力)に**応力集中係数K**をかけた値で応力を評価する。

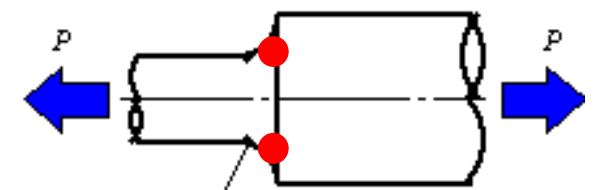
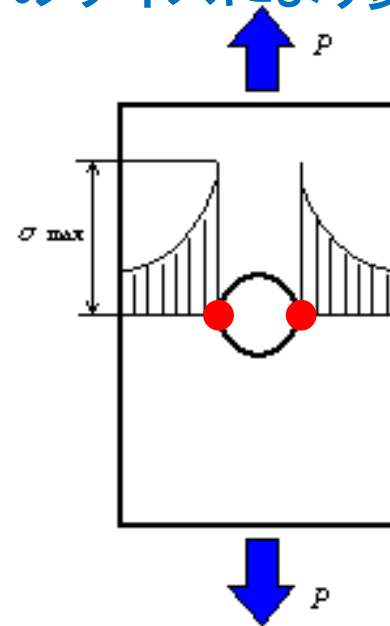
**Kは形状(穴や切欠き, 段など) およびそのサイズにより変化する。**

Kはデータベースから調べること。



断面積A

応力集中のない均一な応力分布



応力集中部

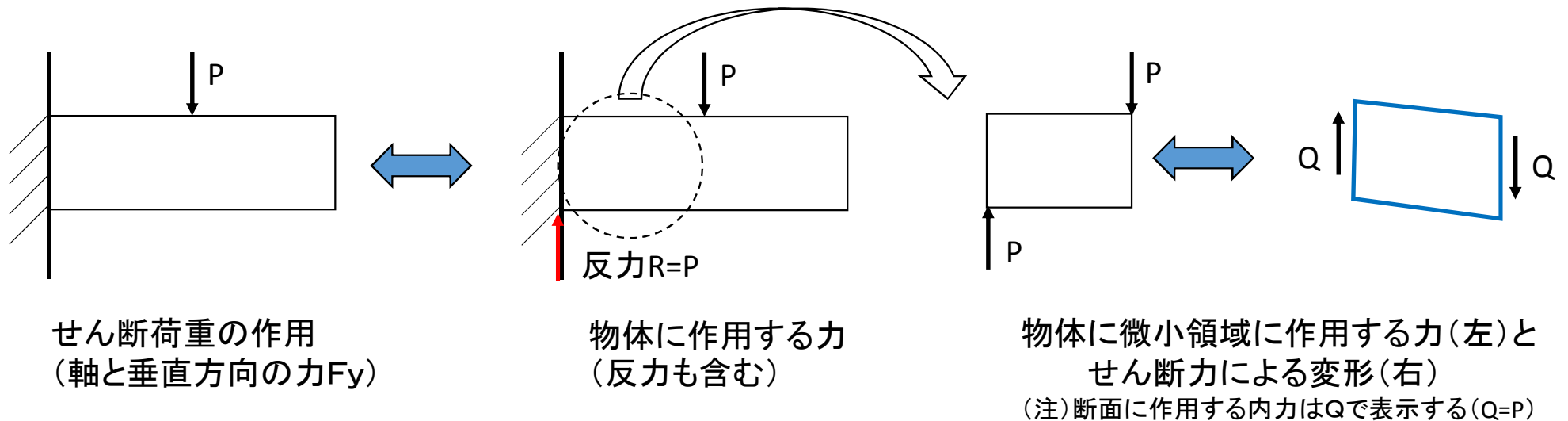
応力集中位置 (赤○部)



## 2. せん断変形とねじり変形（テキスト第4章）

(1) **せん断力**: 断面をずらすような軸に垂直方向に作用する力をいう.

例 カッターやハサミで断面を切断するような力, 刃物で輪切りをするような力



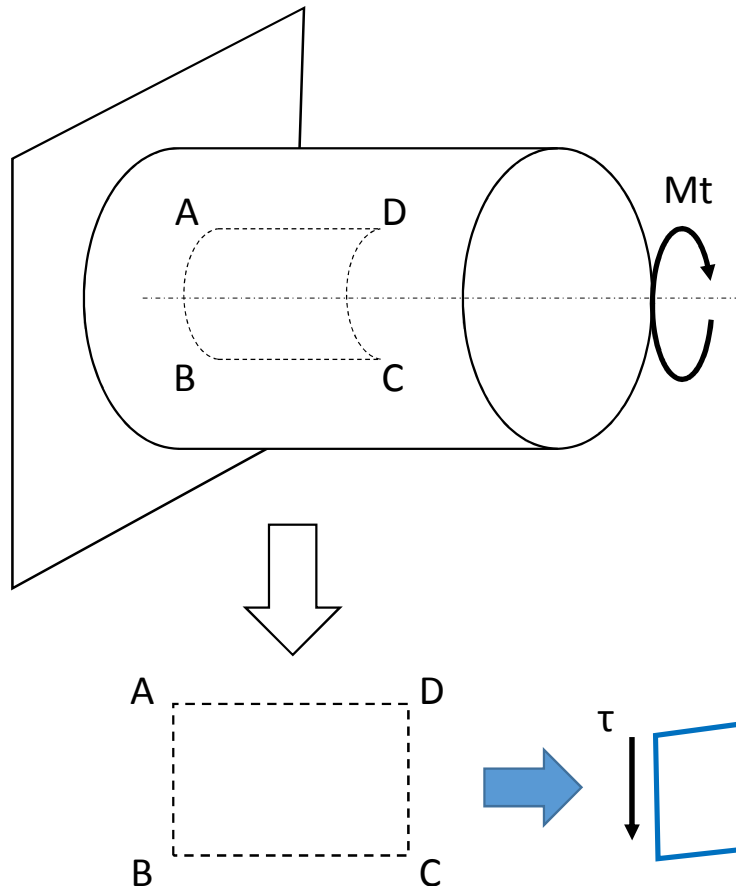
- 断面積を $A$ とすると, 断面に作用する応力は $Q$ の方向で,

$$\tau = Q/A$$

これを**せん断応力**という(記号: $\tau$ タウ)



## (2)ねじりによってもせん断変形する



(注)図では示していませんが、共役せん断応力も発生します。

ねじりモーメント $M_t$ によって円筒はねじれる。  
このときの変形を外周において考えると、

微小領域ABCDの長方形は、  
下図(右)のようにひし形に変形する。  
(消しゴムなどで試してみてください)

即ち、せん断変形が生ずる。  
円周面の微小領域では図のようにせん断応力  
が生ずる。

※せん断変形は(せん断力だけでなく)、  
ねじりモーメントによっても生ずる  
ことを理解してください。

実際に機械の動力源はモーターなどの回転型  
であり、伝動軸によって動力が伝達されるので  
回転軸のせん断強度は重要である。

以降では、ねじりモーメントによって生ずるせん断応力やねじれ角を調べます。





### (3)せん断ひずみ,せん断応力の性質 (テキストp51)

せん断ひずみの定義により,  $\gamma = r\psi / L = r \theta$  と表せる.

この式から

せん断ひずみは半径rに比例することがわかる.  
最大値は外周に生ずる. また中心では0である.

即ち,  $\gamma_{\max} = r_0 \psi / L$

せん断ひずみの分布は右図のようになる.

#### • せん断応力の性質

せん断ひずみから, せん断応力を求めることができる.

$\tau = G \gamma$  であるから,

$$\tau_{\max} = G \gamma_{\max}$$

せん断応力は, せん断ひずみに一定値(G)を掛けたものであるから,  
せん断応力の分布は, 右上図と同じである.

(値は,  $\gamma$ にGを掛けた値)

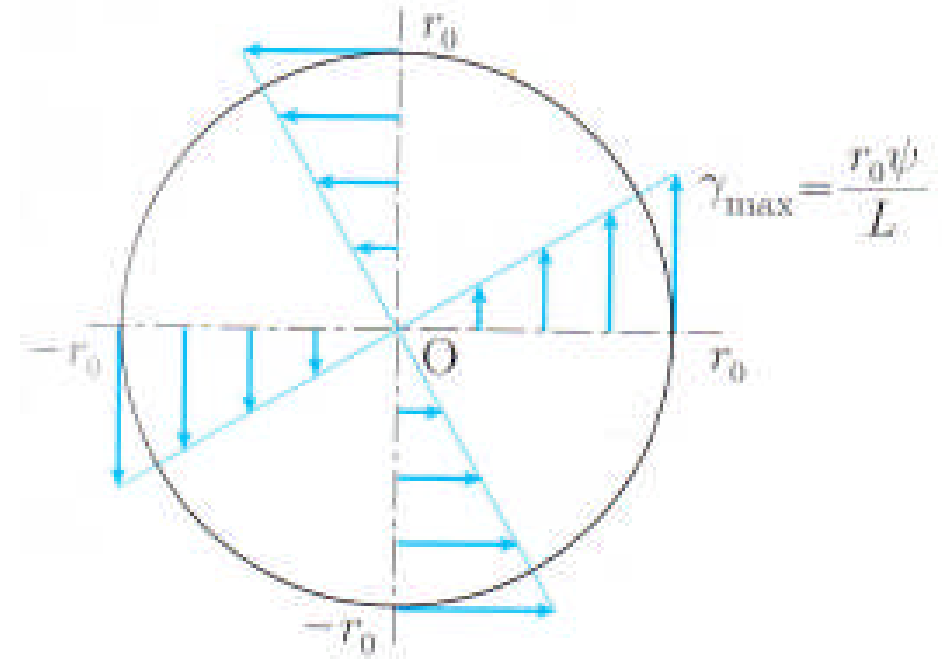


図 4.5 せん断ひずみ分布

外周で最大, 中心では0



(4)せん断応力をねじりモーメント $M_t$ (外力)によって表す (テキストp51)

実際の問題では、トルク $T$ が与えられます。次に応力や歪を求めます。

この順:外力 $T \Rightarrow$ 生ずる応力を求める $\Rightarrow$ ひずみを求める。

モーメントの釣り合いを考えます: せん断応力 $\times$ 面積 $\times$ 腕の長さの和(積分) = モーメント。

せん断応力や腕の長さは半径 $r$ の関数なので、総和は $r$ で積分します。

次に、[図 4.6](#)のように、半径 $r$ 、微小長さ $dr$ のリングの領域を考え、リングに作用するせん断応力 $\tau$ により、中心軸まわりに発生するねじりモーメント $dM_t$ を考えると

リングの面積: 円周 $2\pi r \times$ 幅 $dr$

$$dM_t = r\tau dA = r \times Gr\theta \times 2\pi r dr = 2\pi Gr^3\theta dr \quad (4.10)$$

となる。全断面にわたるねじりモーメント $M_t$ は、上式を積分して

$$M_t = \int_0^{\frac{d}{2}} dM_t = 2\pi G\theta \int_0^{\frac{d}{2}} r^3 dr = G\theta \times 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} r^3 dr = G\theta I_p$$

$M_t = G \cdot \theta \cdot I_p$

(4.11)

ここで、 $I_p$ を断面二次極モーメント (polar moment of inertia of area)

と呼ぶ。直径 $d = 2r_0$ の中実軸の $I_p$ は 円ならばこの値となる

( $I_p$ の定義)

微小な面積 $dA$ に半径の2乗を掛けたものの総和

$$I_p \left( = \int r^2 dA \right) \quad \boxed{I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r_0^4}{2}} \quad (4.12)$$

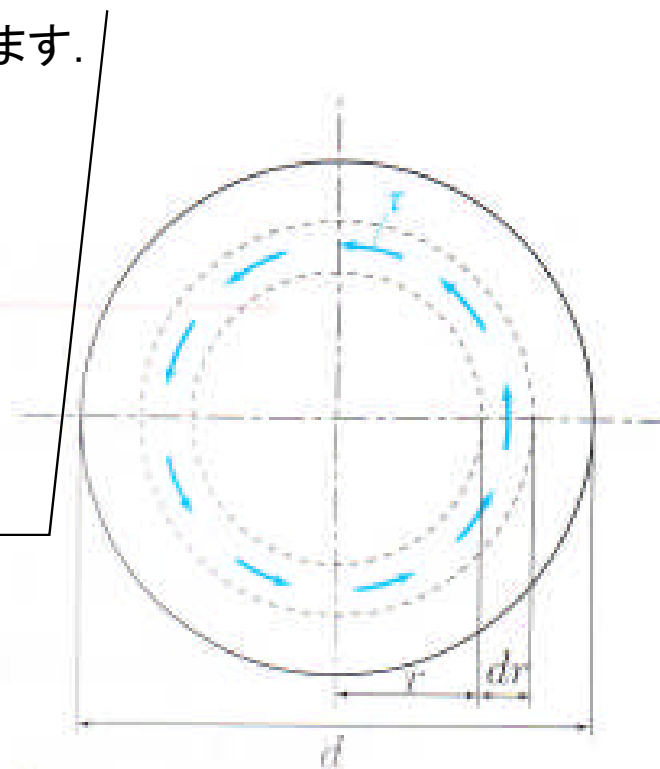


図 4.6 軸に垂直な断面の作用応力



(5) 外力 $M_t$ によって発生するせん断応力 $\tau$ ，ねじれ角 $\psi$ を求める (テキストp52)

$$M_t = G \cdot \theta \cdot I_p \longrightarrow \theta = \frac{1}{GI_p} M_t = \frac{32}{\pi G d^4} M_t \quad (4.13)$$

ここで、 $GI_p$  をねじり剛性 (torsional rigidity) と呼ぶ。これは、単位の比ねじれ角を生じさせるのに必要なトルクの大きさを表している。

単位長さあたりのねじれ角 $\theta$ がわかったなら、長さ $L$ の軸全長にわたるねじれ角 $\psi$ は

$$\psi = L\theta = \frac{LM_t}{GI_p} = \frac{32LM_t}{\pi G d^4} \quad (4.14)$$

となる。

半径 $r$ の位置におけるせん断応力は式(4.9)より、

$$\tau = Gr\theta = \frac{M_t}{I_p} r \quad (4.15)$$

式(4.15)より、せん断応力は半径に比例して大きくなり、最大せん断応力 $\tau_{\max}$ は外周 $r_0 = d/2$ で生じ、その大きさは

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{M_t}{Z_p} \quad (4.16)$$

ここで $Z_p$ は極断面係数 (torsional modulus of section) と呼ばれ、中実軸の場合は

$$Z_p = I_p / \frac{d}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{16} \quad (4.17)$$

$$M_t = G \cdot \theta \cdot I_p$$

$$\psi = L\theta = L \cdot M_t / (G \cdot I_p)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \times \frac{d}{2}$$

この3つの式は必ず覚えること



## (5) 伝導軸 (テキスト第5章)

### 動力からトルク(ねじりモーメント)を求める方法.

動力とは, 単位時間当たりの仕事である.

仕事は, 力×距離である. したがって, 動力=(力×距離)/時間

$$\text{即ち, } H(\text{動力}) = F \times d/s = F \times v \quad (\text{単位: N}\cdot\text{m/s})$$

トルク(T)は回転させるための力を表し, 力×腕の長さ(回転半径) (単位: Nm)

$$\text{即ち, } T = F \times r \quad (\text{単位: N}\cdot\text{m})$$

回転運動では,  $v = r\omega$  ( $\omega$ :角速度)であるから,

$$H = F \times v = F \cdot r\omega = T \cdot \omega$$

$$\text{即ち, } T = H/\omega \quad (\text{Nm}) \quad \textcircled{1}$$

$\omega$ は通常, 1分間の回転数(n)で与えられる(回転機器は通常これで回転数を表す).

単位は rpm (revolution per minute)

$$\text{したがって, } \omega = 2\pi n/60 \quad (\text{rad/s}) \quad \textcircled{2}$$

動力と回転数からトルクを求めるための式は以上の①と②である.



### 3. 曲げ (テキスト第6章)

#### (1) 内力 $Q$ (せん断力)および内力の曲げモーメント $M$

(テキストp79)はりの応力やたわみの計算では, 内力を求める必要がありますが, 特に内力の曲げモーメント $M$ が重要.

(解説)右図(テキストp79)において,

はりに荷重が作用しています(上の図)

仮想的に中間の断面 $C$ で切断したとすると,

断面 $C$ では, 断面力として,

せん断力 $Q$ , 曲げモーメント $M$ が作用しているはずです(中央の図)

(もし作用していなければ, 区間 $AC$ の部分は力が釣合わず, 静止できない)

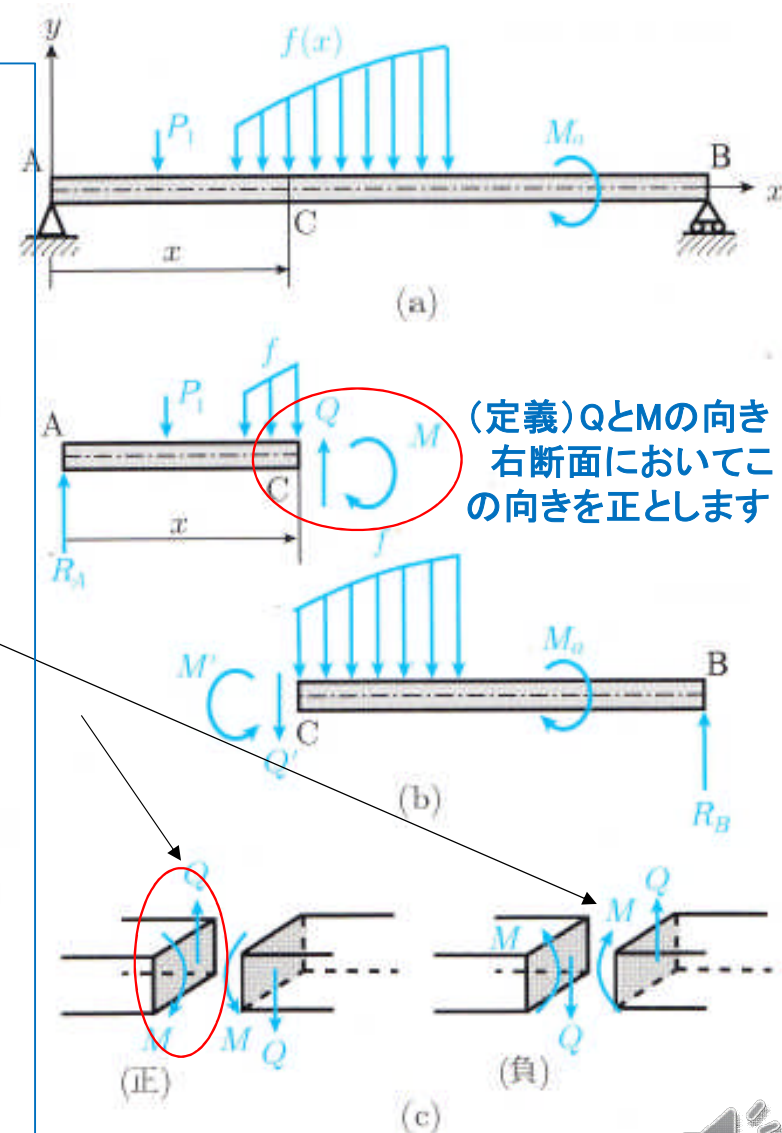


図 6.5 せん断力  $Q$  と曲げモーメント  $M$

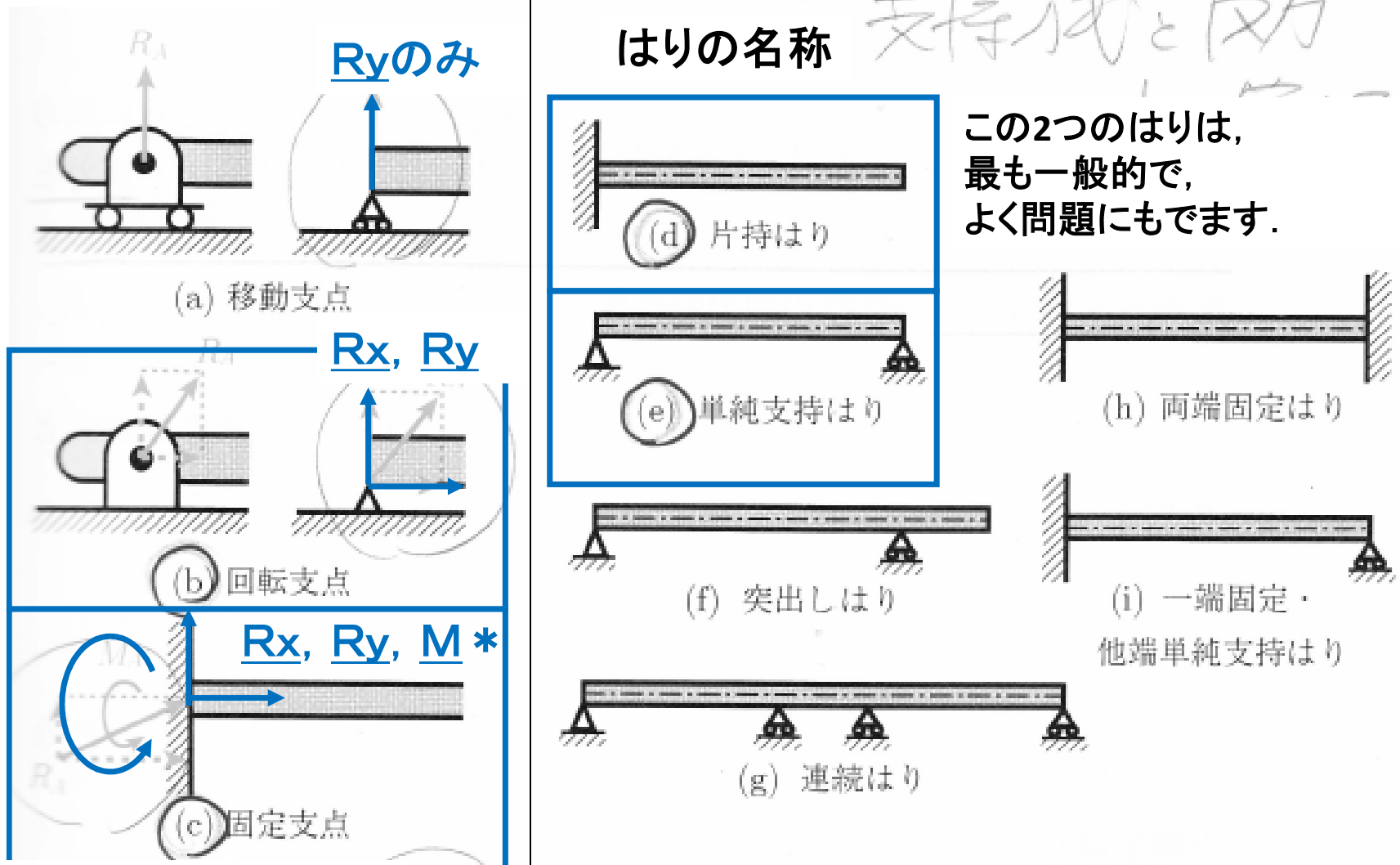


## (2) 支持方法と反力

分布荷重、集中荷重と外力モーメント

テキストp77参照

7



支持条件と反力

\* 固定の反力ではモーメントも生じます。  
理由は傾く(回転する)ことができないため。

図 6.2) はりの支持条件と種類



(テキストp89)

### (3) 曲げによって生ずる応力の特性

となる。応力  $\sigma$  は、図 6.17 (b) に示すように中立面上  $y = 0$  で  $\sigma = 0$ 、距離  $y$  に比例して上側は引張り応力、下側は圧縮応力となる。このはりの断面に働く垂直応力を 曲げ応力 (bending stress) という。はりは曲げモーメント

### (2) 断面に生ずる垂直応力と内力のモーメント $M(x)$ の関係

断面に生ずる垂直応力に面積  $ds$  を掛け、中立軸からの距離を掛けたものはその応力による曲げモーメントとなる。これを全断面で積分すると、内力のモーメント  $M$  となるので、

$$M = \int_A y \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA \quad (6.14)$$

ここで、

$$I = \int_A y^2 dA \quad (6.15)$$

とおくと、

$$M = \frac{EI}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (6.16)$$

式 (6.11) と式 (6.16) から、曲げ応力は

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad (6.17)$$

となる。図 6.17 に示すように、曲げ応力  $\sigma$  は、中立軸から最も離れた位置で最大 (最小) となる。  $M > 0$  のとき、 $y = h_1$  の上表面の最大引張り応

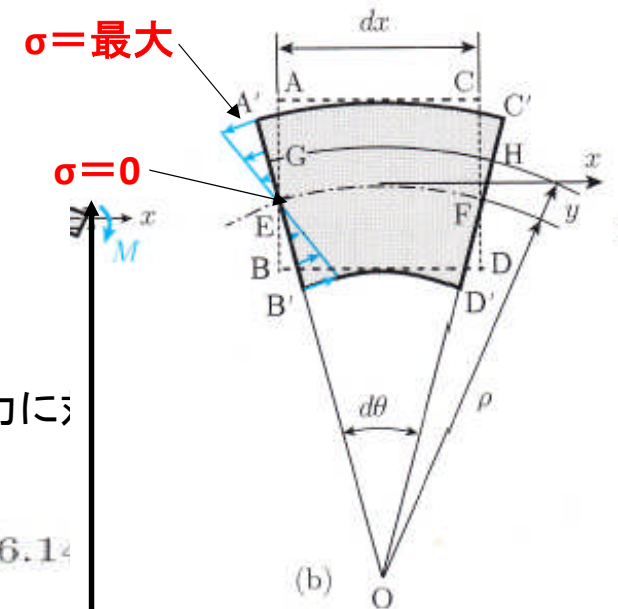


図 6.17 純曲げを受けるはりの変形と応力



#### (4) 断面2次モーメント (テキストp89)

断面形状による曲がりにくさを表す  
(Eは材質による曲がりにくさを表す.  
E・Iを曲げ剛性という)

- 定義

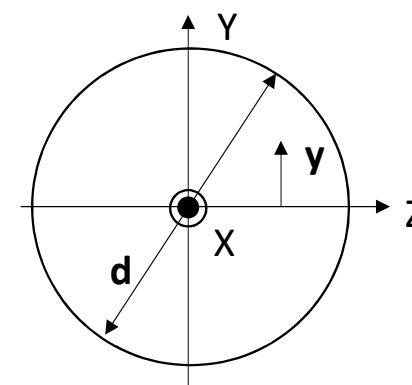
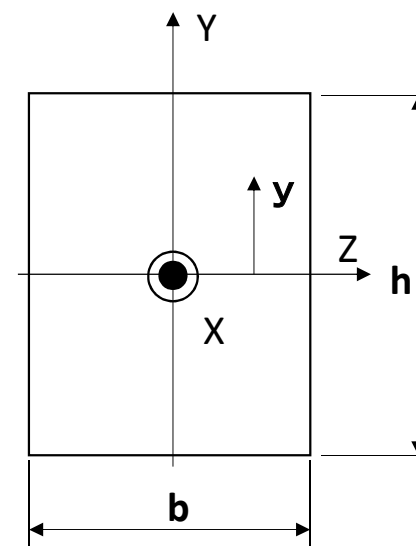
$$I_z = \int_A y^2 dA$$

- 長方形断面 幅b, 高さhのとき,

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

- 円形断面の場合  
直径dのとき,

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}$$



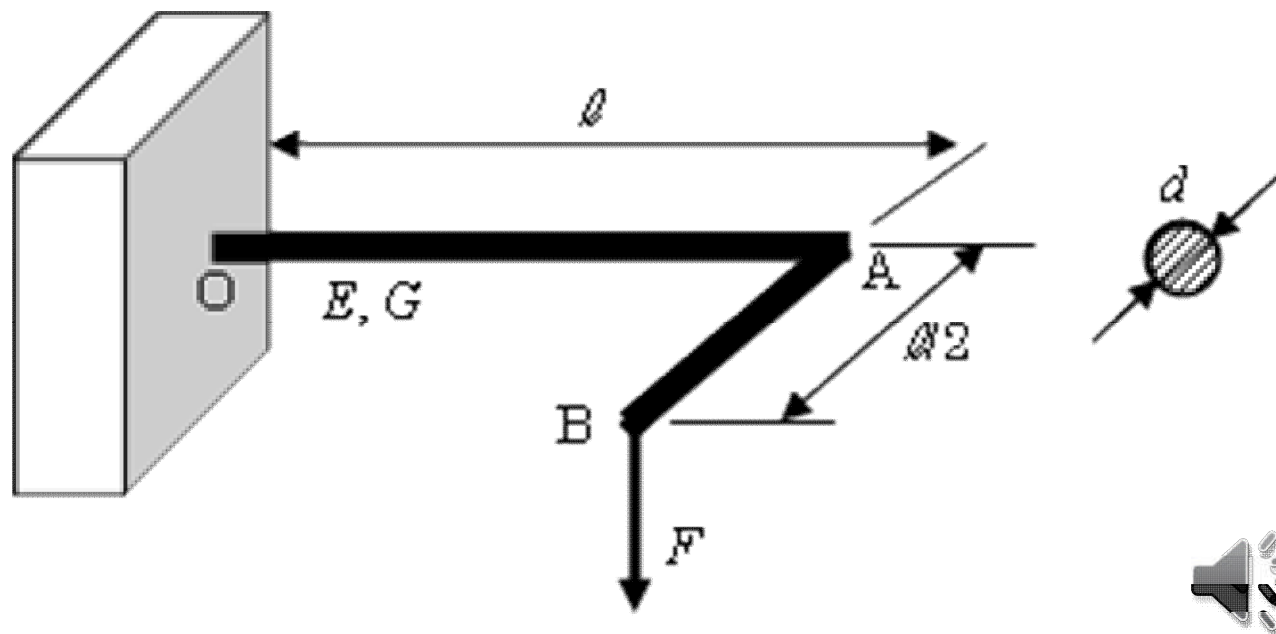


<理解度確認問題>  
ねじり, 曲げの複合(1)

下図のように曲がった棒があります.

点O(固定部)に生ずる応力を求めてください.

- 垂直応力(x方向)
- せん断応力



## 点O(固定部)に生ずる力

- 引張応力 引張荷重は作用していません.  
曲げモーメント $F \cdot \ell$ のみです

$$\sigma_x = F\ell / I \times d/2$$

$$\text{ここで } I = \pi d^4 / 64$$

- せん断応力 せん断荷重 $F$ とねじりモーメント $M_x$ が作用します.

$$\tau = F/A + F \cdot \ell / 2 / I_p \times d/2$$

ここで,

$$A = \pi d^2 / 4,$$

$$I_p = \pi d^4 / 32$$

