授業（第4回：テキスト第3章に対応）

テキスト第3章は、引張（圧縮）に関する応用問題を解きます。

第2章で学んだ以下の事柄が基礎となりますので，まず確認してください。

テキスト第2章では，部材に外力が作用したときに変形量や応力を求めました.

毎度ですが，とにかく覚えてほしい重要な式は以下の2つです.

- $\sigma = E \cdot \varepsilon$ （E：ヤング率、材料により決まった値となる。材料の引張試験で求められる. p17）

この式を垂直応力（$\sigma = F/A$），垂直ひずみ,（$\varepsilon = \Delta L/L_0$）の定義により書きなおすと以下のようになります。

$F/A = E \cdot \Delta L/L_0$ （F：引張力、A：断面積、ΔL：変形量（伸び）、L_0：元の長さ）

この式から変形量ΔLは以下のように求まります. ⇒ $\Delta L = F \cdot L_0 / (A \cdot E)$ （p17）

＜第3章で応用問題として扱う主なタイプ＞
引張に関する代表的な問題です（以下の3つ）．

①重力による棒の伸び

②不静定である場合

③熱による変形が加わる場合

難しいポイントは何か？

　　についてちょっと考えてみてください．

本日の講義では，①と②を学びます （③は次回）

＜解答＞

①重力による棒の伸び

A：断面の位置によって作用する力が変わります．
重力は体積に比例するためです．

②不静定である場合

A：力の釣合い，モーメントの釣合いだけでは内力を求めることができません．
式の数より，未知数である内力の数の方が多いためです．
式の数を増やすために，生ずる変位に関する条件を考える必要があります．

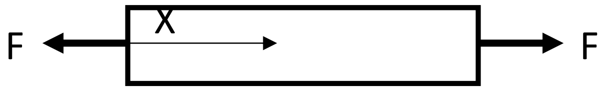
③熱による変形が加わる場合

A：外力以外に熱によっても材料は伸び・縮みが生じます．
外力による変形，熱による変形の両方を求める必要があります．

以上のことを頭において，以降で各問題について検討します（今回は①，②のみ）

①重力による伸び　（テキストp27～p30に相当）

下図のように水平に置かれた棒を引張る場合には（荷重：F）、どの断面においても内力はPである.



このような場合は内力は断面の位置によらず一定（F）なので、
式の中のFはこの値を使えばよい。

即ち，

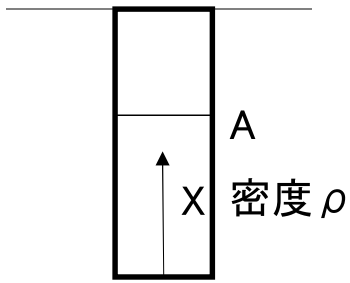
$\sigma = E \cdot \varepsilon$　（E：ヤング率、材料により決まった値となる。材料の引張試験で求められる）

この式から　$F/A = E \cdot \Delta L/L_0$（F：引張力、A：断面積、ΔL：変形量（伸び）、$L_0$：元の長さ）

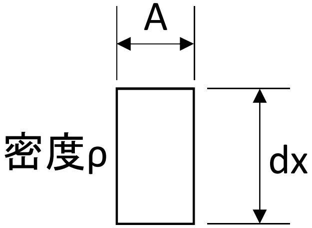
この式から変形量ΔLなどが求められます.

もう一度言いますが，これはFが一定の場合です.

荷重Fが位置Xの関数ならばどうしたらよいでしょうか？
この例として，自重を考えます．



微小部分dxにおける自重による軸力はρgAdx
（重力加速度をgとする）



- 一様な断面積(A：一定)の棒ならば，

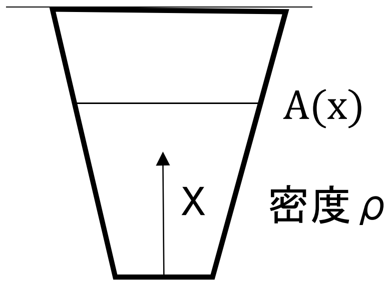
位置Xにおける軸力は，

$$N(x) = \rho gAx \qquad (1)$$

断面が変化する棒ならば，
位置Xにおける軸力は

$$N(x) = \int_0^x \rho g A(x) dx \qquad (2)$$

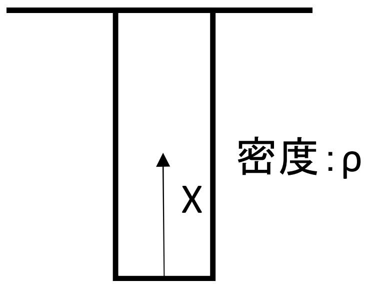
（注）A(x)は位置Xにおける断面積を表す関数



軸力Nが求められたならば，応力σは以下の様に求められる．
垂直応力は，σ=F/A （F：引張力（軸力N）、A：断面積）であるから，

- **一様な断面積の場合は，σ(x) ＝ρgA X/A＝ρg・X （3）**
- **断面が変化する場合は，σ(x)= $\int_0^x \rho g A(x) dx$ / A(x) （4）**

次に棒のひずみや伸びを考えます.



ε ＝ΔL/L　からΔL＝εLとなりますが,

これが使えるのはΔLが位置よらず一様に伸びる場合です.

もしも伸びδが位置Xによって変化する場合は，微小長さdxについての伸びをdδとして,

　　　　dδ＝εdx　　を使います（荷重はXによって変化するので，伸びもXによって異なります）

上の式から，ひずみは　ε＝dδ/dx = σ/E　（σ＝E･εから）

＝（F（x）/A）/E　（σ＝F/A　から）＝F(x)/AE　　　　（5）

したがって，dδ＝F（x）/AE dx　となり，棒の長さがLならばその伸びはこれを0～Lまで積分した値です.

即ち,

$$\delta = \int_0^L d\delta\, dx = \int_0^L (F(x)/AE)\, dx = (1/AE)\int_0^L F(x)\, dx \qquad (6)$$

（注）もしもFが一定ならば，δ＝FL/AE　となる（いつもの式）.

断面積AがXによって異なる場合はAはXの関数であるから，$\delta = (1/E)\int_0^L F(x)/A(x)\, dx$　となる.　（7）

＜まとめ＞自重による棒の伸びを求める場合．（テキストp27～p30）

自重の場合では，断面の位置によって内力（軸力）が異なります．
（断面の下側の部分の体積が変化するため）

- 軸力　断面の位置をXとすると、発生する軸力はXの関数になります。

下からXの位置の断面における軸力ならば，長さ方向に0からXまでの体積を計算し，
密度ρをかける：式（1），（2）

- 応力，ひずみはこの軸力から求まる．　応力：式（3），（4），ひずみ：式（5）

- 伸び

　一様な断面ならば，Aは定数であるので，伸びは式（6）．
　一様な断面でなければ，Aも含めて積分する必要があります。
　　⇒軸力，断面積ともXの関数として、X＝0から求める断面位置Lまで積分する：式（7）

今までのスライドを元に以下の問題の解き方を考えてみてください.

＜練習問題＞

(1)自重を考慮した円柱(図1)の伸びを求めなさい. 但し, 断面は円で(半径:R), 密度はρとする.

ヒント:前のスライドを参考にしてください.

(2)円錐台(図2)の両側に引張荷重Pが作用した場合の伸びを求めなさい. 但し, 両端の半径をそれぞれR_0, R_1とする.

ヒント:これは荷重Pは一定ですが, 断面積AがXの関数です. 前のスライドでA(x)を積分します.

(レポートNo.3, 問1)

(3)台形の板(厚さt)を図のように鉛直に固定した場合の自重による伸びを求めなさい(図3). 但し, 密度をρとする(式(7)の場合).

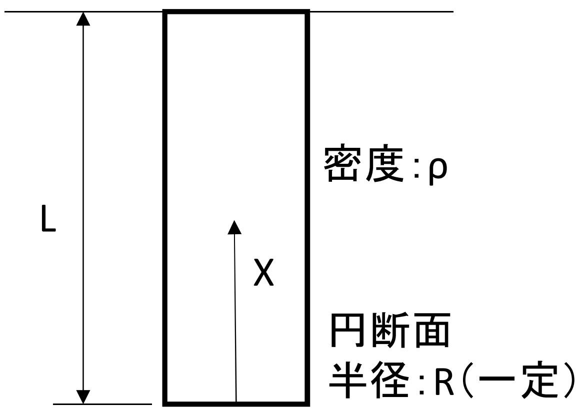


図1

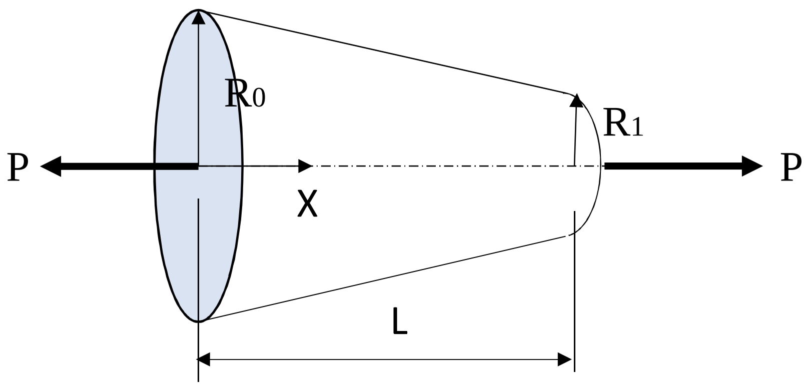


図2

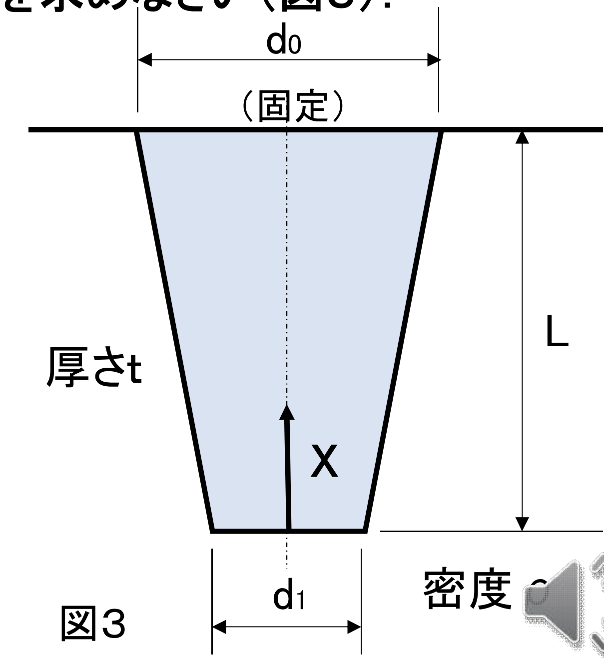
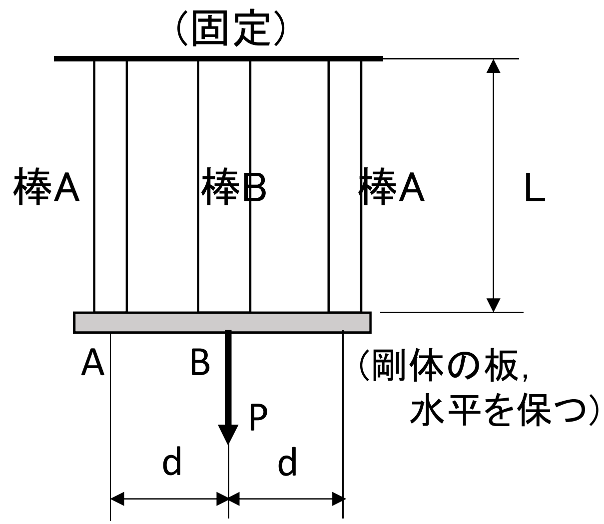


図3

②不静定問題（その1） （テキストp31～p32に相当）

まず以下の問題を考えてください.

<問1>右図のように2本の棒Aと1本の棒Bがあり，以下の様に下端を剛体の板で結合した．3本の棒の上端は固定されている．剛体板の中心に荷重Pを作用させたとき，各棒の伸びを求めなさい．なお剛体板は棒が伸びた際にも水平を保つものとする．また棒AおよびBの断面積およびヤング率をA_1，A_2，E_1，E_2とする.



棒A，棒Bの軸力をN_A，N_Bとすると，

Y方向の釣合い： $2N_A + N_B - P = 0$

モーメントの釣合い：B点回りでは対称のため式が立てられない.

A点まわりでは，Y方向の力の釣り合いと同じ式になってしまう.

というわけで，未知数2つ（N_A,N_B）に対して，式が1つしか立てられないので解くことができない.

このように力の釣合い（モーメントの釣合いも含む）だけでは解けない問題を<u>不静定</u>という.

では不静定問題はどのようにしたら解けるか？

未知数の数＞式の数　なので

未知数の数　＝　式の数　となるように式を増やす.

何の式を立てるのか？　⇒　”変位の条件“　を表す式を立てて式の数を増やす！

では，先ほどの問題に戻って，変位の条件を表す式を考えてみてください.

未知数：2個，式：1個だったので，変位の条件式は1個で十分である.

（答え）　変位の条件は，棒Aの伸び＝棒Bの伸び　である.

棒は一様な軸力を生じ，また断面も一定であるから，変位の式をあてはめて，

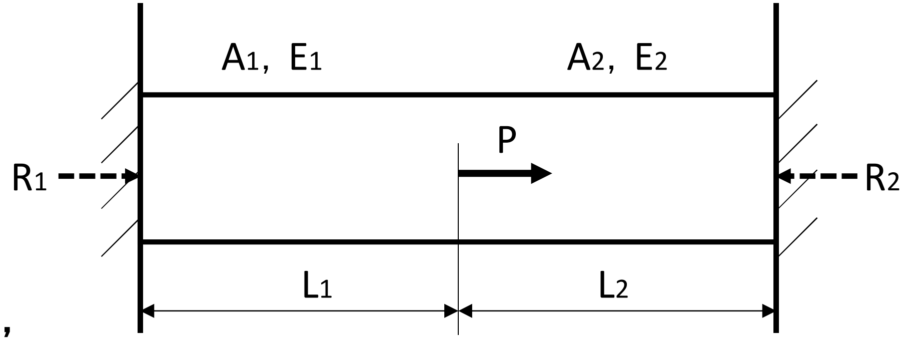
$$N_A \times L/(A_1 \times E_1) = N_B \times L/(A_2 \times E_2)$$

これで，未知数：2個 (N_A, N_B)，式：2個　となって未知数が求められるようになった！

不静定問題（その2） （テキストp30～p31に相当）

では次の問題を考えてください．

<問2>　図のように両端を固定された棒があり，図の位置に荷重Pが作用している．この場合の，左右の壁から受ける反力を求めなさい．但し，L_1およびL_2の区間における断面積，ヤング率をそれぞれA_1，A_2，E_1，E_2とする．



＜解答＞

（Step１）荷重P，反力R1,R2に関する力の釣り合いの式を立ててください．

図を見て分かる通り，3つの荷重は1直線上にあるので，モーメントの釣合いの式は立ちません．

$R_1 + P - R_2 = 0$　のみ　…①

（Step2）未知数は2つの反力なので，式がもう一つないと求まりません．

式を“変位の条件”から追加します．この場合の変位の条件は何でしょうか？

少し考えてみてください．

変位の条件は，両端が固定されているので，

L_1部の伸び＋L_2部の伸び＝0　　　です．

この式を反力R_1，R_2で表す必要があります．

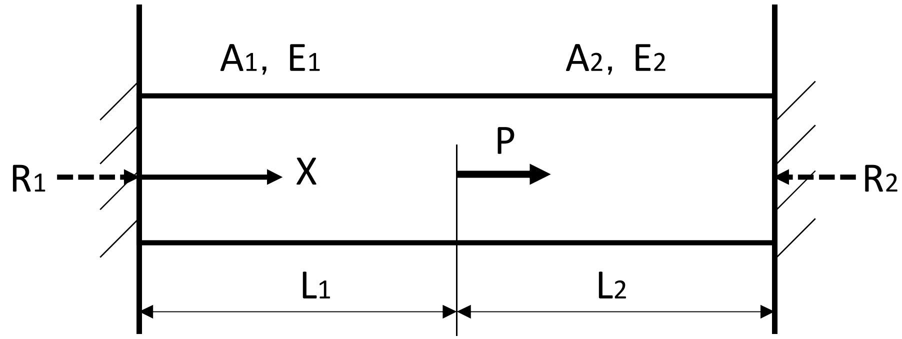
区間 $[0, L_1)$の軸力はR_1，区間$(L_1, L_2]$の軸力はR_2です．

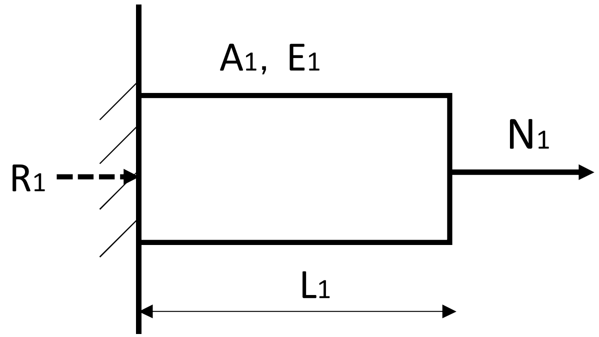
したがって荷重と変位の関係式から

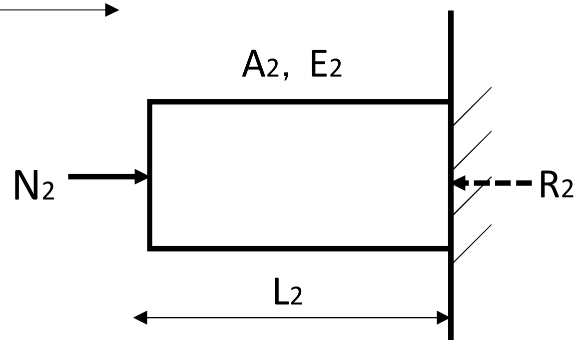
$$R_1 \times L_1 / (A_1 \cdot E_1) = R_2 \times L_2 / (A_2 \cdot E_2) \quad \cdots ②$$

式①と式②を連立すると，R_1，R_2が求まります．

$$R_1 = P \cdot L_2 / (L_1 + L_2), \quad R_2 = - P \cdot L_1 / (L_1 + L_2) \qquad （答）$$





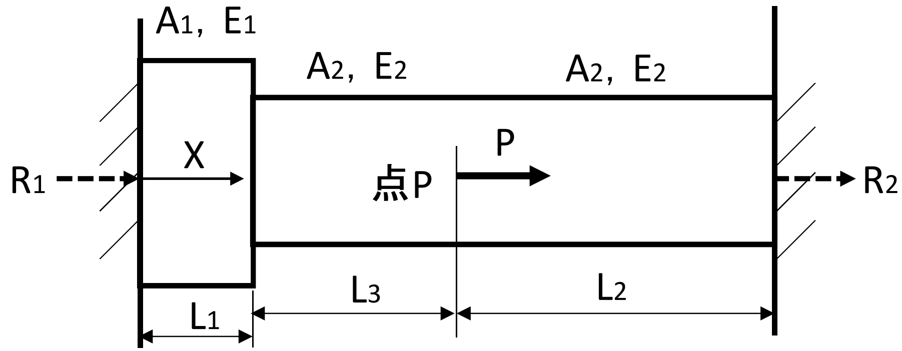


いま解いた問題とほぼ同じです．

理解度確認のために考えてみてください．

問　右図において反力R_1，R_2および点Pの変位を求めなさい

（レポートNo.3，問2）



（ヒント）

力の釣り合いの式は前と同じです．

変位の条件は，

L1＋L3部分の変位＋L2部分の変位＝0　です．

なお，L_1およびL_3部分の軸力はR_1で，L_2部の軸力はR_2です．

（注）この問題では，反力はいずれもXの正方向にとりました．複雑な問題では向きは（最初は）わからないので，このようにするのが定石です．