材料力学Ⅰ（第9回，6/19）（テキスト第5章）

今回は第5章の復習と残りの部分をやります．

＜復習＞

動力源が発生する回転させるためのモーメントをトルクという．

（注）一般に，回転運動させるためのモーメントをトルクといい，ねじり変形させるための外力をねじりモーメントという．

動力源においては，トルクではなく，

動力と回転数が与えられる場合が一般的である．

したがって，第4章の式を適用するにあたり，

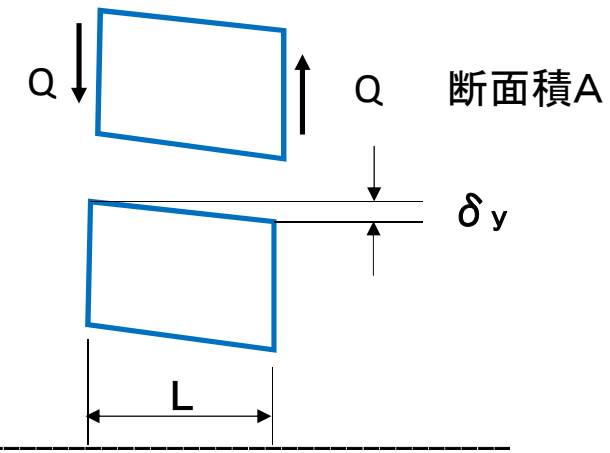
動力と回転数からトルク（ねじりモーメント）を求める必要がある．

第4章の各式の“ねじりモーメント”には，求めたトルクを代入する．（注意点はこれのみ）

（復習） せん断応力，ひずみの性質　（テキストp48～49）

- せん断応力　$\tau = Q/A$
- せん断ひずみ　$\gamma = \delta y / L$
- 横弾性係数：G（せん断応力とせん断ひずみの比例定数）

$$\tau = G\gamma$$



ねじれ角，せん断応力を計算するための基本式

- 曲げモーメントとねじれ角の関係　（テキストp52）

$$Mt = G \cdot \theta \cdot Ip$$

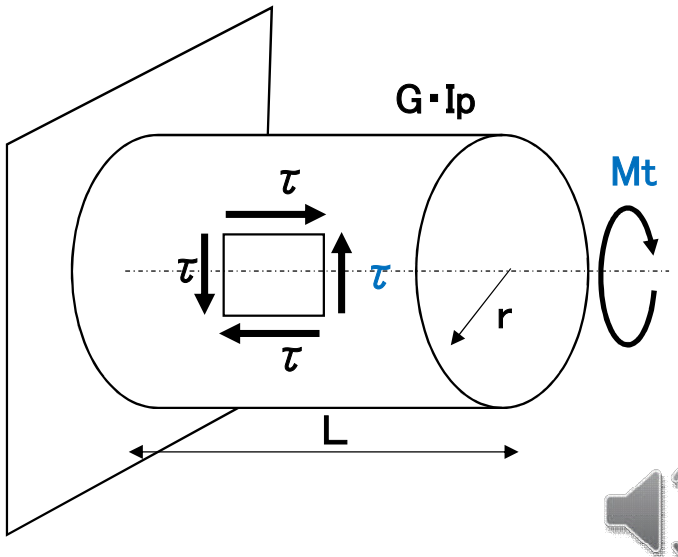
G：横弾性係数，Ip：断面2次極モーメント

- 曲げモーメントによって生ずるねじれ角

$$\psi = L \cdot Mt / (G \cdot Ip)$$

- 曲げモーメントによって生ずるせん断応力

$$\tau = \frac{Mt}{Ip} \times r$$ （r：半径，外周で最大となる）



（復習）ねじりに関する基本的な問題

以下の問題は下記のいずれかの式によって計算できます.

①ねじりによって生ずるせん断応力，ねじれ角を計算する.

②与えられた円管に付加できる最大トルクを計算する.

③付加するトルクに耐えられるように円管の径を決める.

ねじりモーメントMtによって生ずるねじれ角ψ，せん断応力τ

- 曲げモーメントとねじれ角の関係

  $Mt = G \cdot \theta \cdot Ip$　　（4.11）（テキストの式番号）

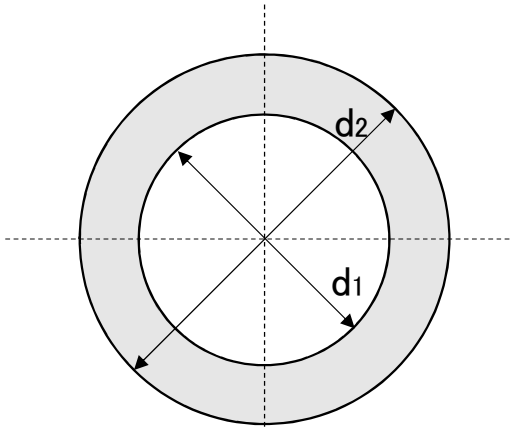
- 曲げモーメントによって生ずるねじれ角

  $\psi = L \cdot Mt / (G \cdot Ip)$　　（4.14）

- 曲げモーメントによって生ずるせん断応力

  $\tau = \frac{Mt}{Ip} \times r$　　（4.15）

- 断面2次極モーメント（中実丸棒*）：$Ip = \pi d^4/32$



（注*）中空の場合のIpは，中空部のIpを引く

（復習） 伝導軸

動力からトルク（ねじりモーメント）を求める方法

動力とは，単位時間当たりの仕事である．
仕事は，力×距離である．したがって，動力＝（力×距離）/時間

即ち，H（動力）＝F×d/s＝F×v　（単位：N・m/s）

トルク（T）は回転させるための力を表し，力×腕の長さ（回転半径）（単位：Nm）

即ち，T＝F×r （単位：N・m）

回転運動では，v＝rω （ω：角速度）であるから，

H＝F×v＝F・rω ＝T・ω

即ち，　T＝H/ω　（Nm）　①（テキスト式5.4）

ωは通常，1分間の回転数(n)で与えられる（回転機器は通常これで回転数を表す．

単位は rpm (revolution per minute)

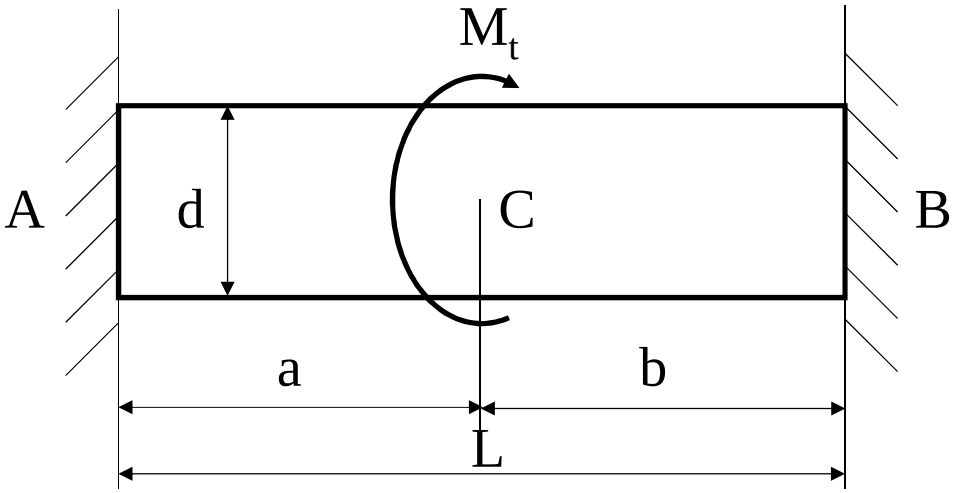
したがって，ω＝2πn/60 （rad/s）　②　（テキスト式5.5）

動力と回転数からトルクを求めるための式は以上の①と②である．

ねじりの不静定問題 （テキストp70，例題5.9）

（今回の新しい内容）

長さL，直径dの丸棒の両端が固定されている．
点CにねじりモーメントM_tを作用させるとき，
点Cのねじれ角と固定端に生ずる反ねじりモーメントM_{tA}とM_{tB}を求めなさい．なお横弾性係数をGとする．

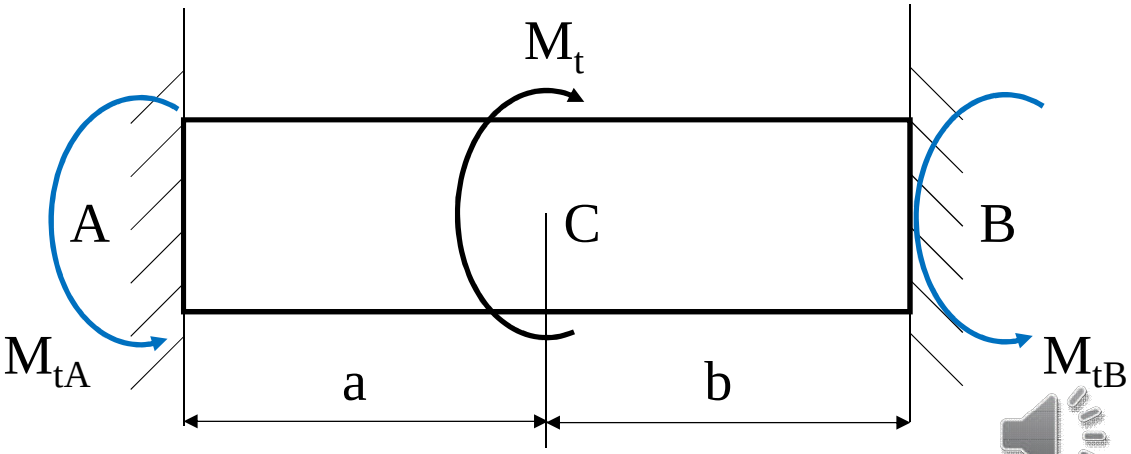


モーメントの釣合いの式は，

$M_{tA} - M_t + M_{tB} = 0$　　①

但し，この式だけでは未知数M_{tA}，M_{tB}を求めることはできない．
即ち，未知数＞式の数　で不静定問題である．

不静定問題の定石は，
変位の条件によって，未知数＝式の数　とする．
ここでは，変位の条件で式を一つ立てる必要がある．



それは何か，テキストを見ずに少し考えてみてください．

変位の条件はケースバイケースであって，問題によって異なります．
図をよく見て変位の条件を探してください．

この問題での変位の条件は，両端固定という状態です．
点Aは固定されているのでねじれ角は0ですが，
(i)反力のモーメントMtAによってAからCに向かうにつれてねじれ角が増加します．
(ii)同様に反力のモーメントMtBによってBからCに向かうにつれてねじれ角が増加します．
(iii)それぞれのモーメントによってC点に生ずるねじれ角は左右で等しくなければならない ことが変位の条件となります．

即ち，
(i) 区間ACにおいて，モーメントMtAによって点Cに生ずるねじれ角は，

$$\psi C = Mt \cdot a / (G \cdot Ip)$$

(ii)区間BCにおいて，モーメントMtBによって点Cに生ずるねじれ角は，

$$\psi C' = Mt \cdot b / (G \cdot Ip)$$

(iii) C点に生ずるねじれ角は左右で等しくなければならないから，

$$MtA \cdot a = MtB \cdot b \qquad ②$$

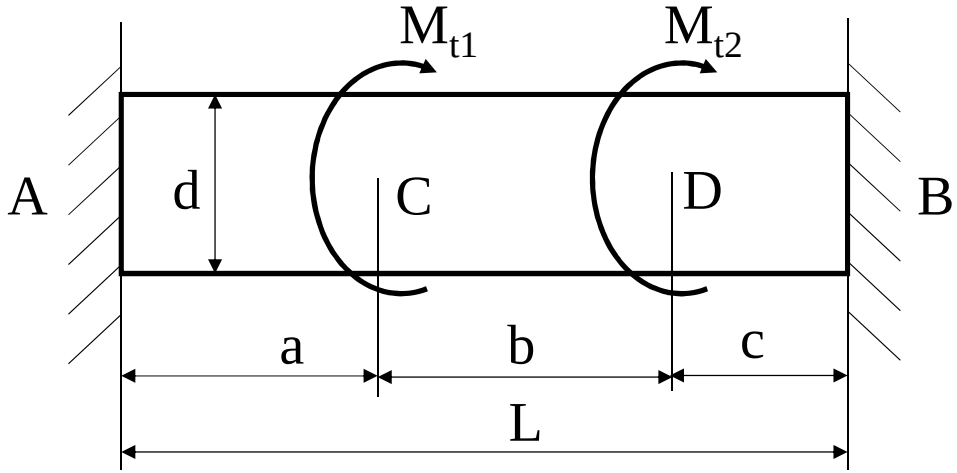
前頁のモーメントの釣合いの式①と上記の変位の条件式②を連立して解くと，

$$MtA = b\,Mt / L, \qquad MtB = a\,Mt / L$$

$$\psi c = Mt\,ab / (G \cdot Ip\,L) = 32Mt\,ab / (G\pi d^4\,L)$$

ねじりの不静定問題　その2　（テキストp71，例題5.10）

長さL，直径dの丸棒の両端が固定されている．
点CとDにねじりモーメントMt1とMt2を作用させるとき，
各長さa, b, c部に生ずるモーメントMta，Mtb，Mtcを求めなさい．なお横弾性係数をGとする．

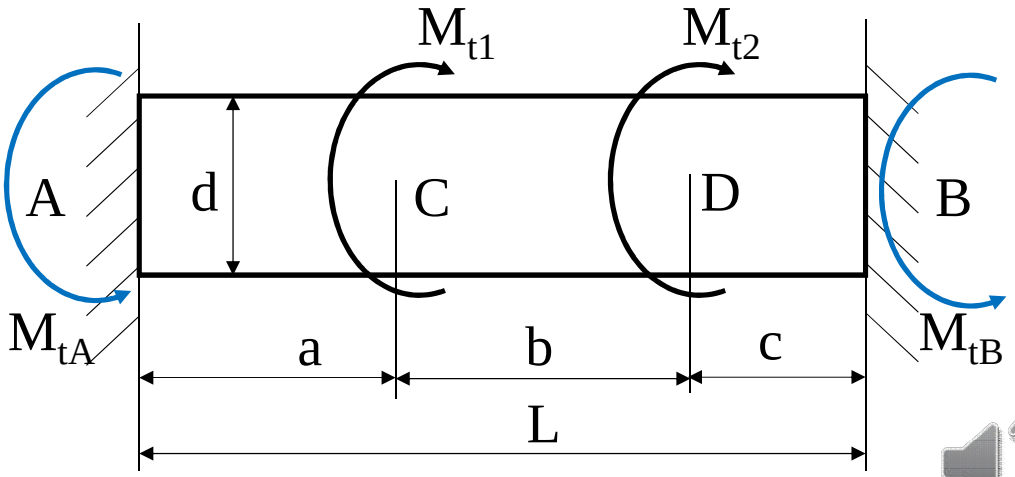


モーメントの釣合いの式は，
Mt1+Mt2－MtA－MtB＝0　　①

但し，この式だけでは未知数MtA，MtBを求めることはできない．
即ち，未知数（2個）＞式の数（1個）　で不静定問題である．

前の問題と同様に変位の条件で式を一つ立てる必要がある．

やり方は同様です．
手順を考えてみてください．



点Aは固定されているのでねじれ角は0ですが，
(i)区間ACでは，反力のモーメントMtAによってねじれ角が生じます．
(ii)区間CDでは，ねじりモーメントMtA－Mt1によってねじれ角が生じます．
(iii)区間BDでは，反力のモーメントMtBによってねじれ角が生じます．
(iv) (i), (ii)によってD点に生ずるねじれ角は，(iii)によってD点に生ずるねじれ角に等しくなければならない．
　これが変位の条件です．

即ち，
(i) 区間ACで，モーメントMtAにより点Cに生ずるねじれ角は，

$$\psi C = MtA \cdot a / (G \cdot Ip)$$

(ii)区間CDで，モーメントMtA-Mt1によって点Dに生ずるねじれ角は，

$$\psi D = (MtA - MtB) \cdot b / (G \cdot Ip)$$

(iii) (i)と(ii)により点Dに生ずるねじれ角はそれぞれの和となり，

$$\psi AD = MtA \cdot a / (G \cdot Ip) + (MtA - MtB) \cdot b / (G \cdot Ip)$$

(iv)区間BDにおいて，モーメントMtBによって点Dに生ずるねじれ角は，

$$\psi D = MtB \cdot c / (G \cdot Ip)$$

(v) 点Dに生ずるねじれ角は等しくなければならないから，

$$MtA\ a + (MtA - Mt1)\ b = MtB\ c \qquad ②$$

前頁のモーメントの釣合いの式①と上記の変位の条件式②を連立して解くと解が得られます．

（解）

$$Mta = MtA = [(b+c)\ Mt1 + c\ Mt2] / (a+b+c)$$

$$Mtb = MtA - Mt1 = (c\ Mt2 - a\ Mt1) / (a+b+c)$$

$$Mtc = -\ MtB = [a\ Mt1 + (a+b)\ Mt2] / (a+b+c)$$

（補足）
円以外の断面のねじり

円形以外の断面をもつ棒がねじられる場合の変形は，断面が平面のままで回転せず一般に軸方向へ凹凸が生じるので，円断面のときのように簡単に解くことができない．弾性力学の理論にしたがって解かなければならないが，ここでは代表的な例について結果だけを示すことにする．

（1） だ 円 形

長軸，短軸の長さがそれぞれ $2a$, $2b$ のだ円形を断面とする棒をねじるとき生ずるねじり応力は，長短軸上では直線的に分布し，周辺で最大となる．それらを図3・6に示すように，τ_a，τ_b とすれば

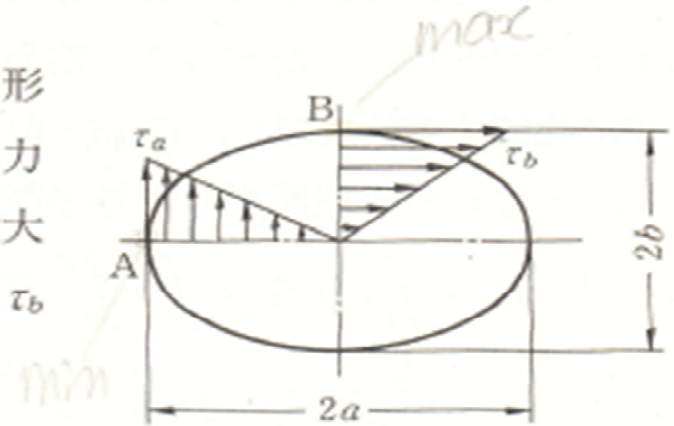


図 3・6

最大値

$$\tau_a = \frac{2T}{\pi a^2 b}, \quad \boxed{\tau_b = \frac{2T}{\pi a b^2}} \qquad (3\cdot 22)$$

ここで，T はねじりモーメントである．

本式で明らかなように，$\tau_b > \tau_a$ となる．また，周辺の応力は接線方向に生じ，その大きさは τ_b から τ_a へと漸次減少する．比ねじり角 $\bar{\theta}$ は，G をせん断弾性係数として次式で与えられる．

$$\bar{\theta} = \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} \cdot \frac{T}{G} \qquad (3\cdot 23)$$

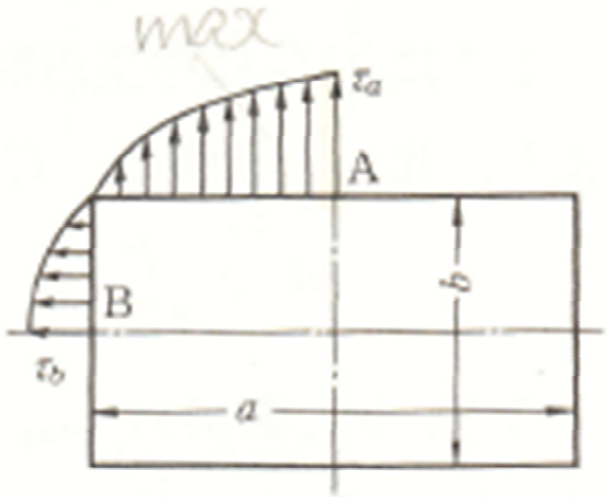
（2） 長 方 形

図3・7のように，両辺の長さ a，b の長方形断面の棒をねじると各辺のせん断応力は，いずれも中央の A，B で最大となるが，全体での最大値は長辺の中央に生じ

最大値 $$\boxed{\tau_{max} = \tau_a = \frac{T}{k_1 a b^2}} \qquad (3・24)$$

また，比ねじり角 $\bar{\theta}$ は

$$\bar{\theta} = \frac{T}{k_2 G a b^3} \qquad (3・25)$$



（応力方向は矢印と異なる）

前のスライドおよびこのスライドの結果を覚える必要はなし.
楕円，長方形のねじりの結果より，中心から最も近い外周でτの最大値が生ずることがわかる.

結論としては，以下を頭に入れておくように！
※軸を軽量化するうえでは円断面が最も有効で，
楕円や長方形にすることはτの低減よりも質量を増加させるマイナスの効果が大きい.

コイルばね （テキストp63）

（式は覚えなくてよい．コイルばねの素線はねじれ変形し，それによってばねのたわみが生ずることだけ覚えておく）

右図5.3(a)のようなばねをコイルばねといい，機械ではよく使われている．

ばねの両端には通常図のような圧縮荷重Pが付加される．

このときコイルの素線には，図5.3(b)のようにせん断力Q（＝P）とねじりモーメントT（P×R，R:コイルの半径）が作用する．

$$Q = P$$

が働いている．

素線の直径 d に対してコイルの半径 R が大きければ，素線の曲率を無視でき，トルク T（ねじりモーメント M_t）による素線表面のせん断応力 τ_1 は，式 (4.16) と (4.17) より

①トルクTにより素線断面に生ずるせん断応力

$$\tau_1 = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16PR}{\pi d^3} \qquad (5.6)$$

で表される．

せん断力 Q によって素線に生じるせん断応力 τ_2 は，断面に一様に分布すると考えて

②せん断力Qにより素線断面に生ずるせん断応力

$$\tau_2 = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4P}{\pi d^2} \qquad (5.7)$$

となる．

これらのせん断応力は，図 5.4 に示すように，素線の内側では同方向，外側では逆方向に作用することから，最大せん断応力 τ_{max} は素線の内側で生じ，次式で与えられる．

①と②の和がτmax

$$\tau_{max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16PR(1 + d/4R)}{\pi d^3} \qquad (5.8)$$

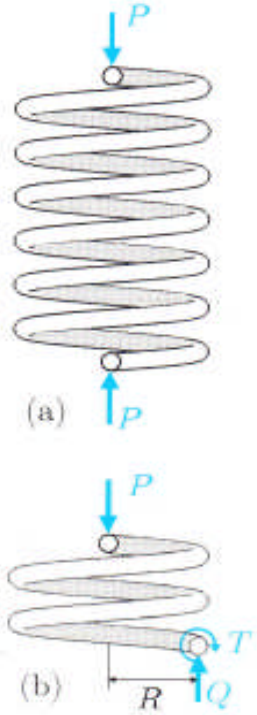


図 5.3　コイルばね

この場合に素線がねじれた場合のばねの軸方向のたわみは幾何学的に求められる.

結果は，テキストp64，式5.10　となる.

$$\delta = (64nR^3 / Gd^4)\,P \qquad \text{式5.10}$$

n：巻き数，d：素線の径，G：素線の横弾性係数　（R：コイル半径）

ばね定数　$k = P/\delta = Gd^4/(64nR^3)$

（以上の式は覚える必要はない.
設計の際に必要になったら，材力のテキスト（ねじれの章）を見ること）