材料力学Ⅰ（第11回，7/3）（テキスト第6章）

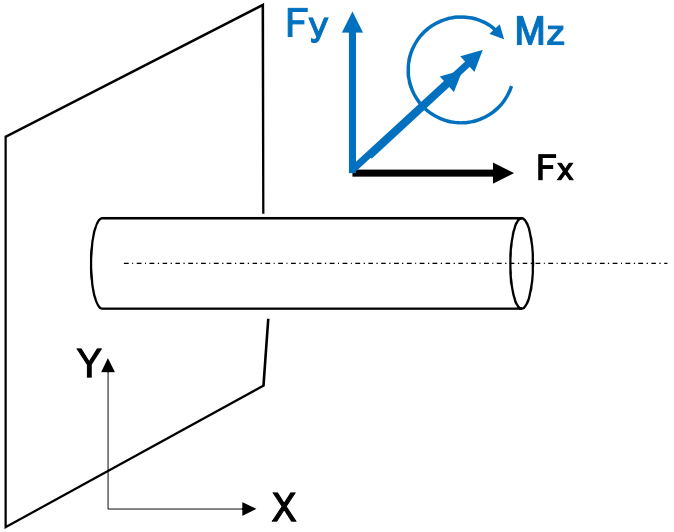
前回から第6章「曲げ」を行っています．

はりの問題
曲げによって生ずる変形（たわみ）や応力を求める．

＜手順＞
（1）反力を求める．（前回，テキストp77）
（これははりに作用する全外力を求めておくためです）

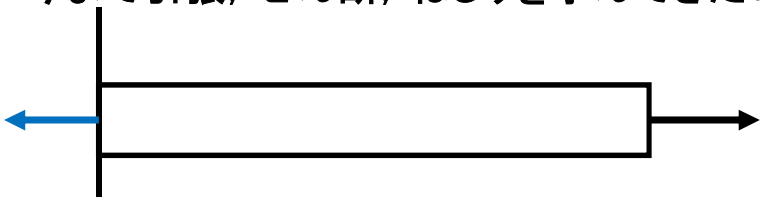
（2）部材に生ずる内力を求める （今回，テキストp79～）
（断面に生ずる内力のモーメントM（x）を求めることが重要で，
これを以降の計算で使います）

（3）内力のモーメントM（x）から，
応力，たわみを計算する．

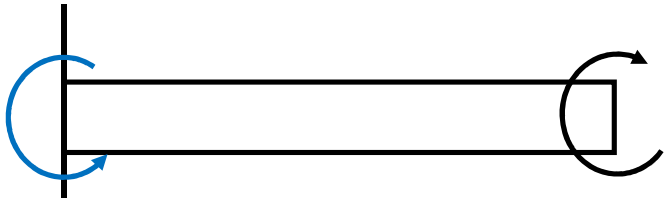


曲げは，荷重Fyやモーメントmzによって生じます．

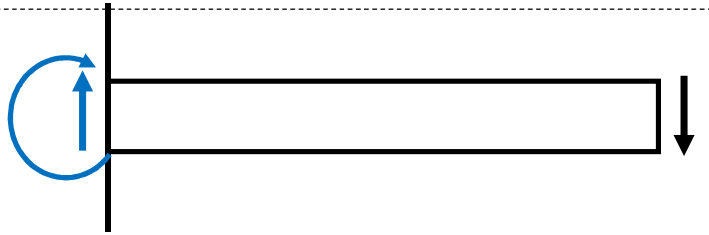
＜補足＞　今まで引張，せん断，ねじりを学んできたので反力（青色）をまとめておく．



引張・圧縮の場合は引張・圧縮（2章，3章）



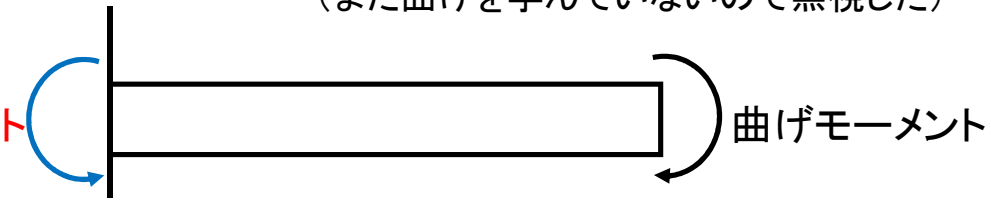
ねじりモーメントの場合の反力はねじりモーメント（4章）



せん断力の場合の反力はせん断力（4章）

（注）4章では無視していたが，曲げモーメントも生ずる（6章）

（まだ曲げを学んでいないので無視した）



曲げモーメントの場合の反力は曲げモーメント（6章）

（ここから今回のテーマ）

内力Q（せん断力）および曲げモーメントMを求める.

（テキストp79，今回の内容はとても重要です）

はりの応力やたわみの計算では，内力を求める必要がありますが，
特に内力の曲げモーメントMが重要.

（解説）右図（テキストp79）において，

はりに荷重が作用しています（上の図）

仮想的に中間の断面Cで切断したとすると，

断面Cでは，断面力として，

せん断力Q，曲げモーメントMが作用しているはずです（中央の図）

（もし作用していなければ，区間ACの部分は力が釣合わず，静止できない）

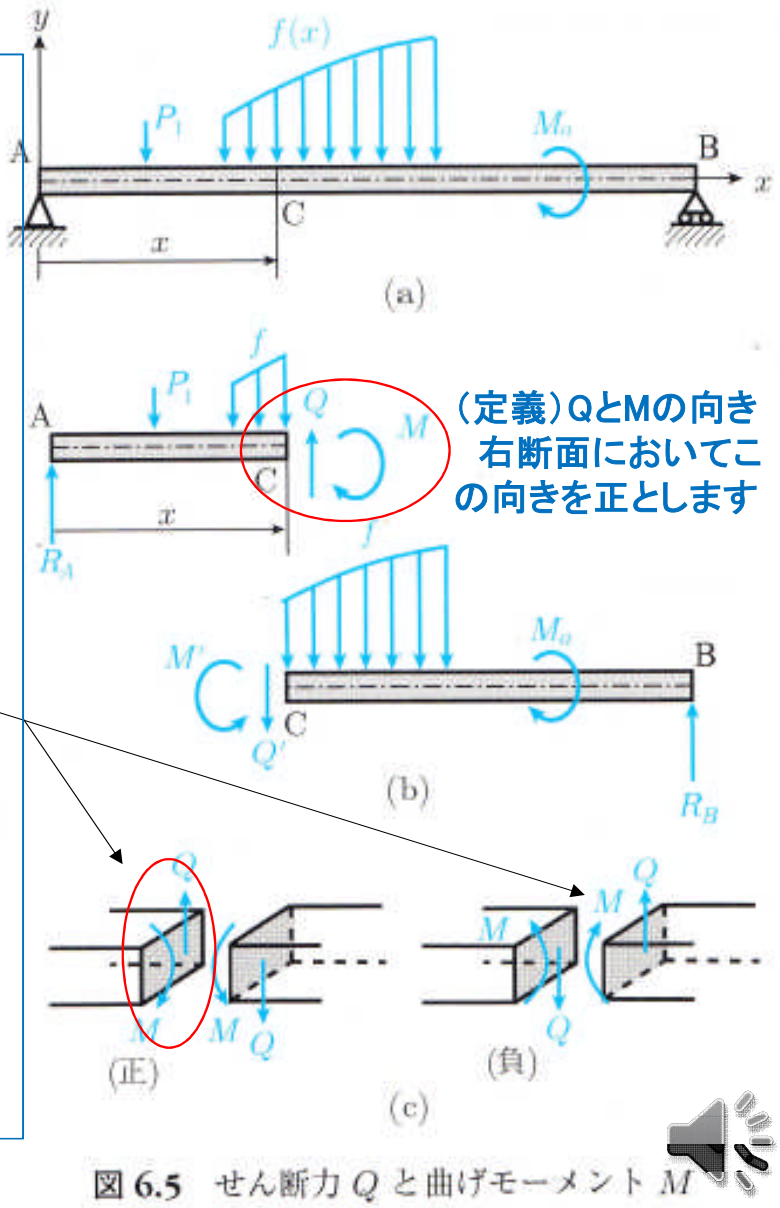


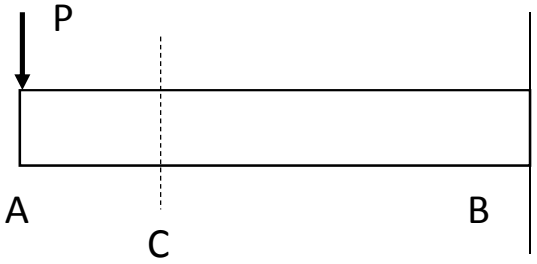
図 6.5　せん断力 Q と曲げモーメント M

テキストには載っていませんが，片持ちはり(右図)で考えるともっとよくわかります．

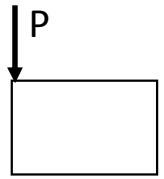
仮想的に中間の断面Cで切断したとすると(右図中央)，

断面Cでは，断面力として，

せん断力Q，曲げモーメントMが作用しているはずです．



（問） ではQとMを求めてください．



もし断面力が作用していなければ，AC部は静止できない

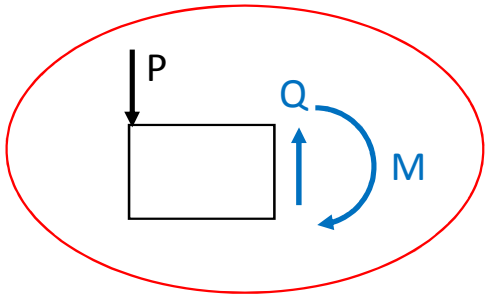
切断したAC部分における力，モーメントの釣合いによって，

−P + Q =0 (Y方向の力の釣合い)

−P･x + M =0 (C点におけるモーメントの釣合い)

これより，Q= P

M = P･x



(定義)QとMの向き
右断面においてこの向きを正とします

実際に断面力が作用：QとM

(注)一般に，Mはxの関数となります．

単にMと書くと外力のモーメント(荷重)と区別しにくいので，

内力のモーメントはM(x)と書くことにします．

内力Q，内力のモーメントM(x)の求め方

右図の場合を例に求め方を示します．
単純支持はりに荷重P1が作用しています（図a）．

（1）反力RA，RBを求める．

- 支持方法により生ずる反力を書きこむ(図b)．
- はり全体での力，およびモーメントの釣合いから，
  RA，RBを求める．
  （これではりに作用する全荷重が求まった！）

（2）断面Cで仮想的に切断し，内力を求める．

- 断面力QとM（x）を断面に書き込む．
- AC部における力の釣合い，モーメントの釣合いから内力を求める．

（注）この問題では注意が必要です．
区間A～ℓ1と区間ℓ1～ℓで場合分けする必要がある．
なぜなら，区間A～ℓ1では荷重P1が入らないが，
区間ℓ1～ℓでは荷重P1が加わる（計算式が異なる）
途中で荷重が作用していると結果が異なるので，その位置で場合分けしてください．

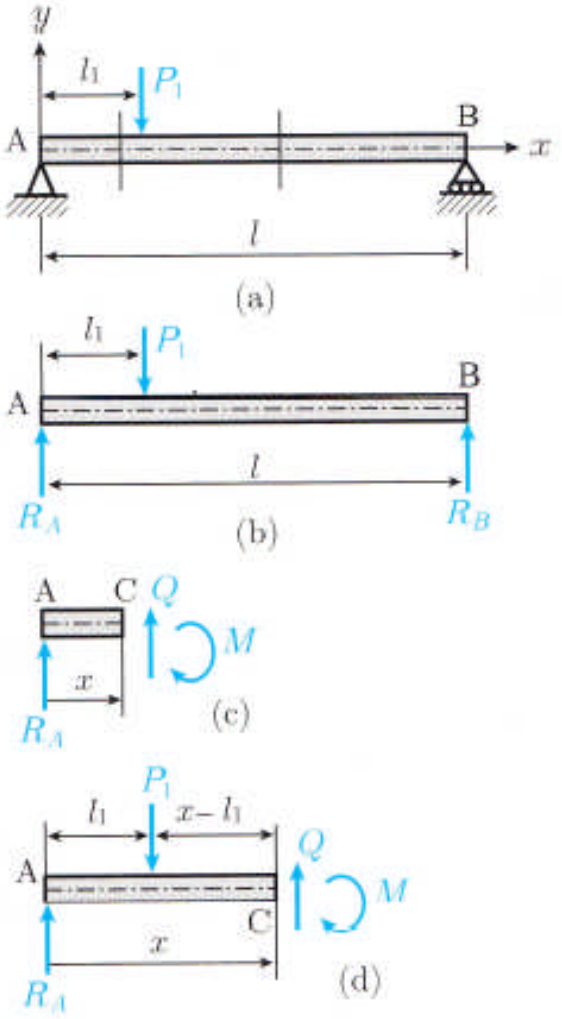


図 6.6　せん断力 Q と曲げモーメ

（テキストの解答）

ℓ1で荷重P1が加わっているので，
区間A～ℓ1（図c）
区間ℓ1～ℓ（図d）
で場合分けしている．

計算過程は単なる力，モーメントの釣合いなので，
テキストp80を参照してください．

結果のみ示すと，
- 区間A～ℓ1では，

Q＝（ℓ－ℓ1）P1/ ℓ
M(x) = （ℓ－ℓ1） P1/ℓ
- 区間ℓ～ℓ1では，

Q＝ℓ1 P1/ℓ
M(x) = ℓ1 P1 (ℓ-x)/ℓ

全区間A～ℓで，Q，M(x)を表すと，図6.7となる．
Qの図をせん断力図（SFD）
M（x）の図を曲げモーメント図（BMD）という．

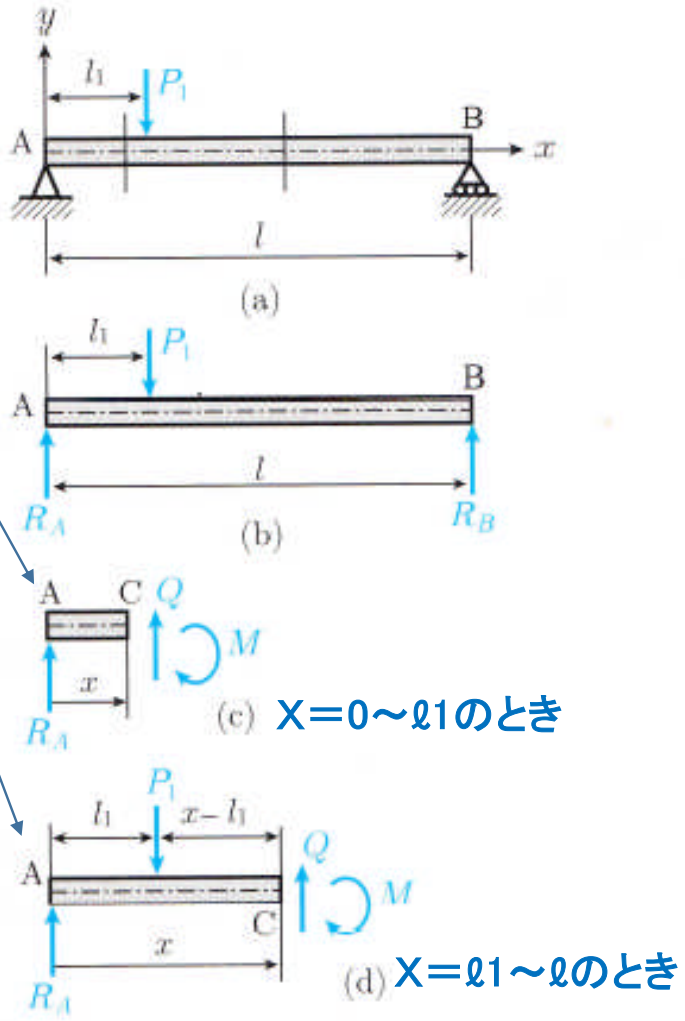
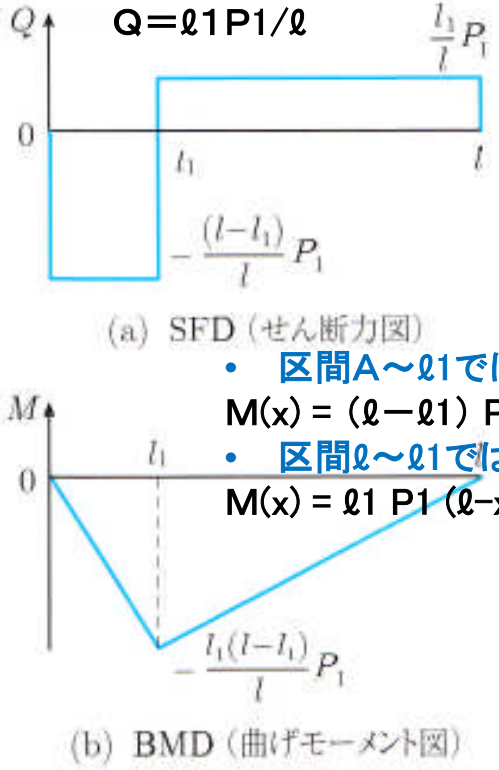


図 6.6　せん断力 Q と曲げモーメント M

- 区間A～ℓ1では，

Q＝（ℓ－ℓ1）P1/ ℓ
- 区間ℓ～ℓ1では，

Q＝ℓ1 P1/ℓ



- 区間A～ℓ1では，

M(x) = （ℓ－ℓ1） P1/ℓ
- 区間ℓ～ℓ1では，

M(x) = ℓ1 P1 (ℓ-x)/ℓ

図 6.7　せん断力図と曲げモーメン

分布荷重の場合
分布荷重は単位長さあたりの荷重です．単位（N/m）（記号：f）
計算の手順は前と同じですが，**分布荷重の場合の計算の仕方**を
テキスト例題(p83)で説明します．

[例題 6.2]

図 6.9 (a) に示す等分布荷重 f_0 を受ける長さ l の単純支持はりの SFD と BMD を求めよ．

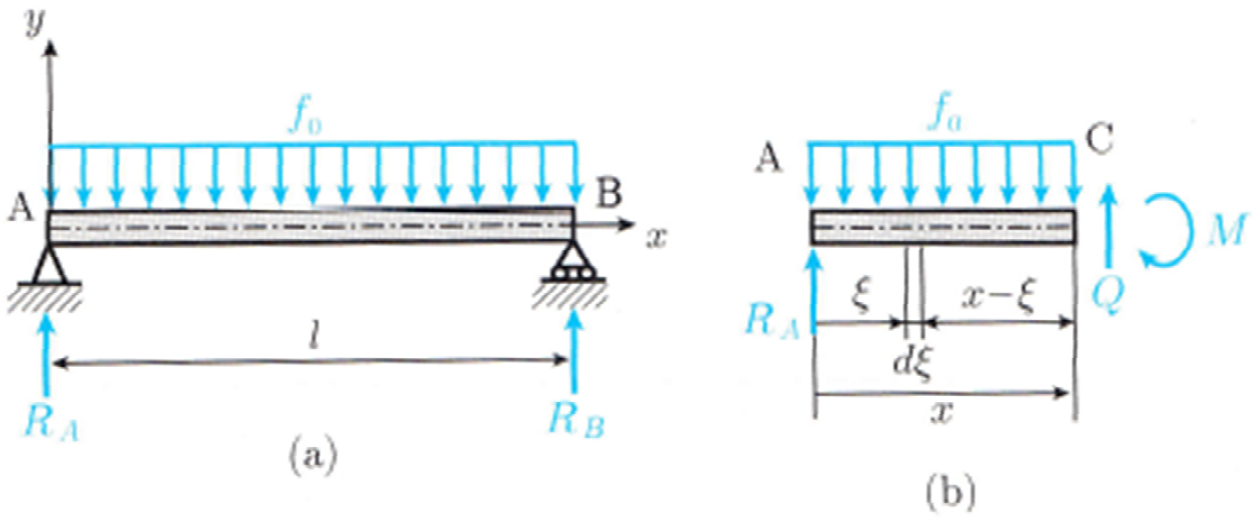


図 6.9　等分布荷重を受ける単純支持はり

分布荷重の場合

手順（前の説明と基本的に同じ）

（1）反力R_A，R_Bを求める．

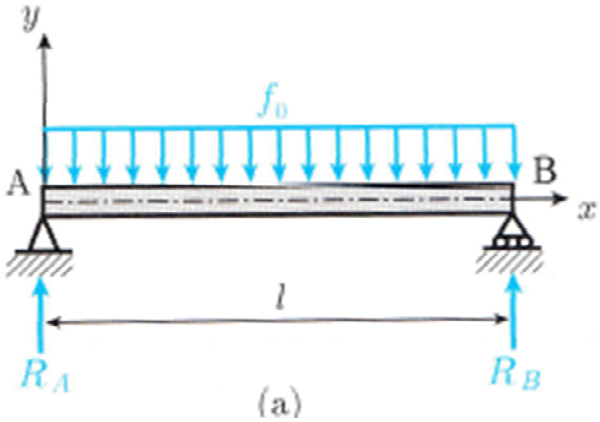
- 支持方法により生ずる反力を書きこむ(図b).
- はり全体での力，およびモーメントの釣合いから，
  RA，RBを求める．

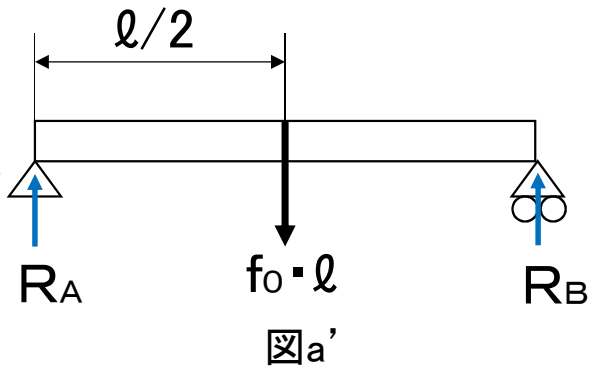
（2）断面Cで仮想的に切断し，内力を求める．

- 断面力QとM（x）を断面に書き込む．
- AC部における力の釣合い，モーメントの釣合いから内力を求める．

詳細は次ページを見てください．

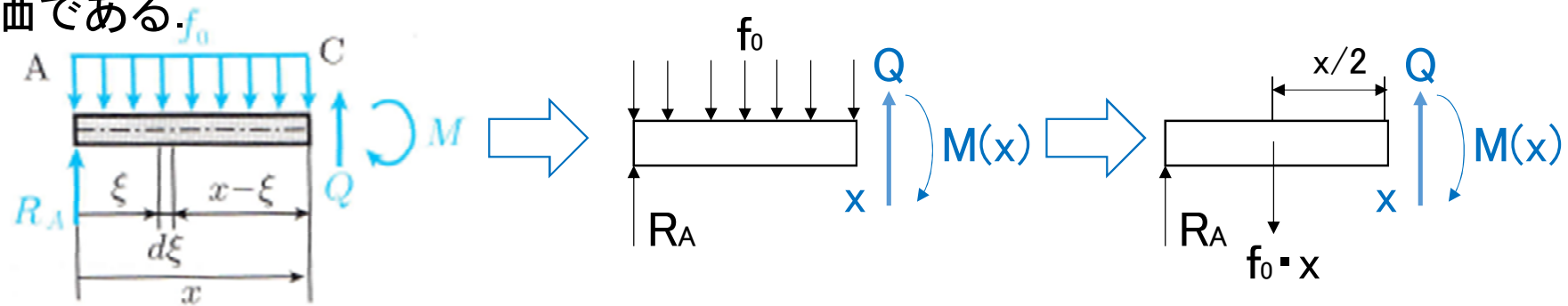
(1)反力R_Aを求める.
はり全体の力の釣合いでは,
図aは図a'と等価である.
Y方向の力の釣合いから,
$R_A = R_B = (f_0 \cdot \ell)/2$





反力ははり全体の力の釣合いで求めるので,このように書いても図aと等価である

(2)内力Q, M(x)を求める.
区間0～xにおける力の釣合いから求めるが,
図bは図b'と等価である.



図b'断面力は部材A～xの力の釣合いで求めるので,このように書いても中央の図と等価である

部材A～xにおける力,モーメントの釣合いから,
$R_A + Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = -R_A$
$R_A \cdot x + M(x) - (f_0 \cdot x) \cdot x/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) = -R_A \cdot x + f_0 \cdot x^2/2$

テキストp86の例題を見てください．
荷重がモーメントになっています．

解き方は同じなので，前と同じように解いてください．
解答はテキストp86にあります．

［例題 6.5］

図 6.15 (a) のように長さ 1 m の両端 (単純) 支持はりの C 点に，反時計回りにモーメント荷重 $M_C = 2000$ N·m が作用している場合の SFD と BMD を求めよ．

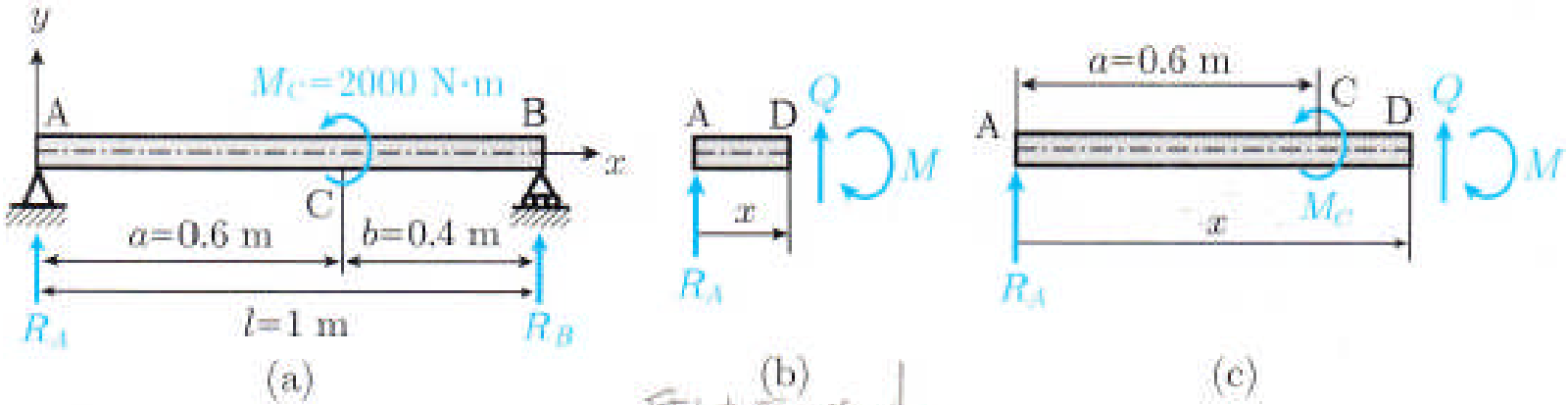


図 6.15 等分布荷重を受けるはり

＜まとめ＞

内力Q，内力のモーメントM(x)の求め方の手順をよく理解してください．

（1）反力R_A，R_Bを求める．

- 支持方法により生ずる反力を書きこむ．
- はり全体での力，およびモーメントの釣合いから，RA，RBを求める．
  （これではりに作用する全荷重が求まる）

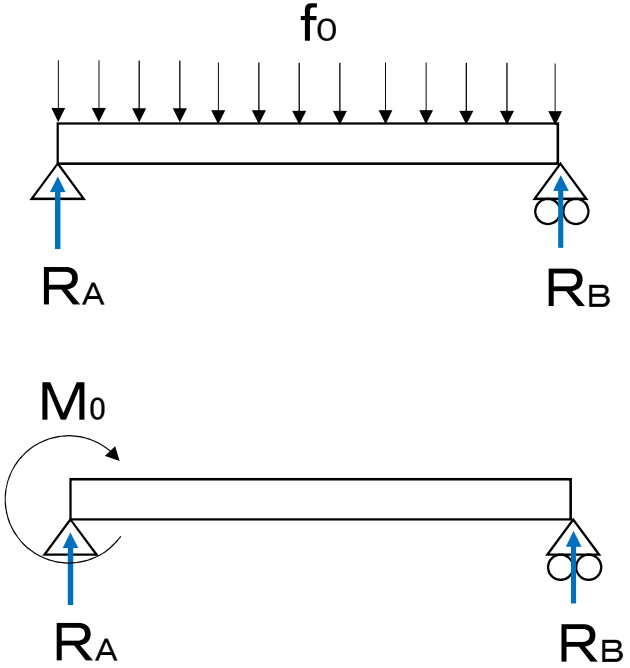
（2）断面Cで仮想的に切断し，内力Q，内力のモーメントM(x)を求める．

- 断面力QとM（x）を断面に書き込む．
- 切断した部分における力の釣合い，モーメントの釣合いから内力，内力のモーメントを求める．

（注）途中で荷重が作用している場合は，”その位置で場合分け”してください．
どのような場合に場合分けが必要かをよく理解してください．

はりの変形や応力は，M（x）が支配的です．
M（x）およびBMDが正しく求められるようにしておいてください．

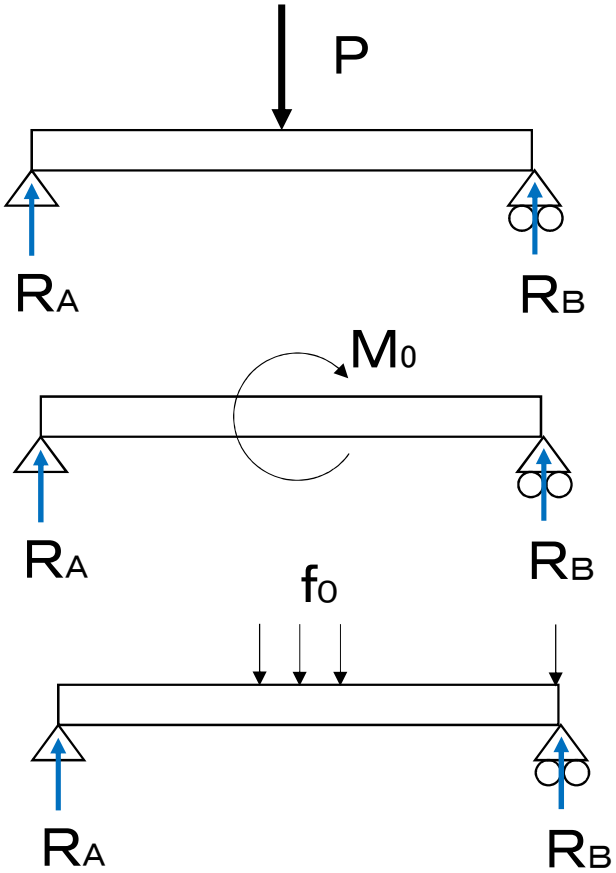
＜重要＞場合分けが必要かどうかがわからないという声を多く聞きます．
ポイントは，M(x)が変わるかどうかです．
必要な場合ではM(x)が変わるので，確認してください．



場合分けが不要

（理由）途中から新たに作用する荷重がない

- 上図は分布荷重が最初から一様に作用しているので分ける必要なし．
- 下図は，A点に荷重が2つ作用しているが，途中では作用していない．

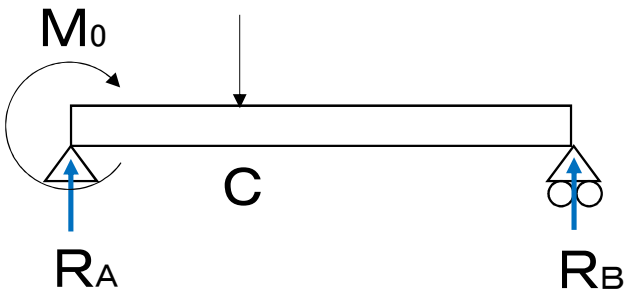


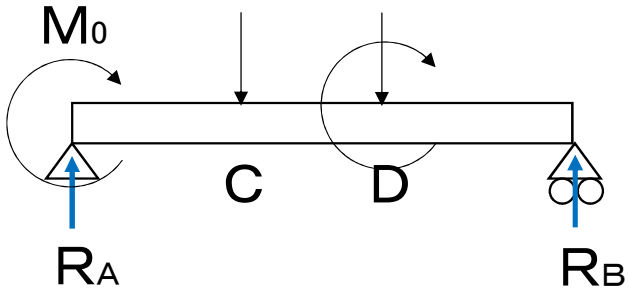
場合分けが必要

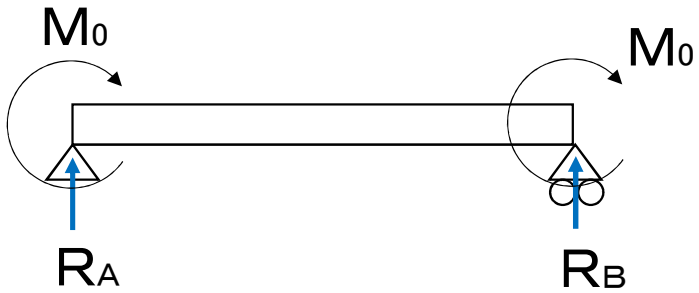
場合分けは，途中から新たに荷重が作用する位置で分ける

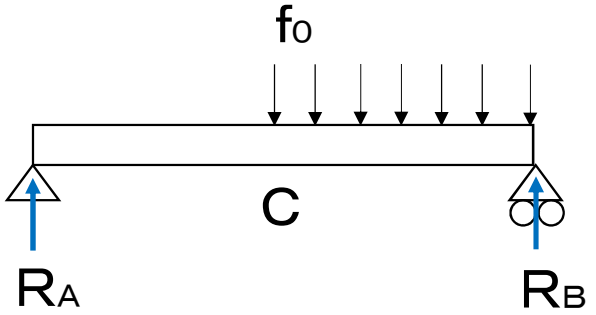
- 上と中央の2つは荷重点（中央）から左右に分ける．
- 最下の場合は左，中央（分布荷重の部分），右の3分割となる．

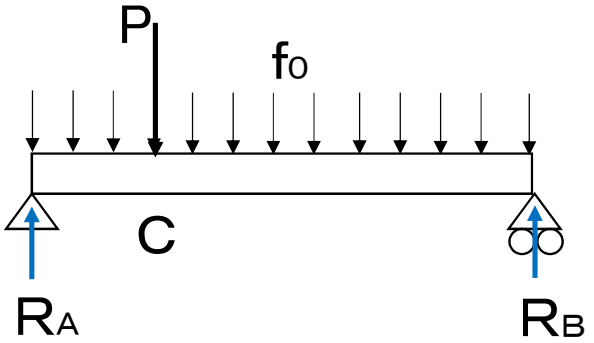
問　以下の各場合について，場合分けが必要か不要かを考え，
必要な場合は，その区間を答えなさい．

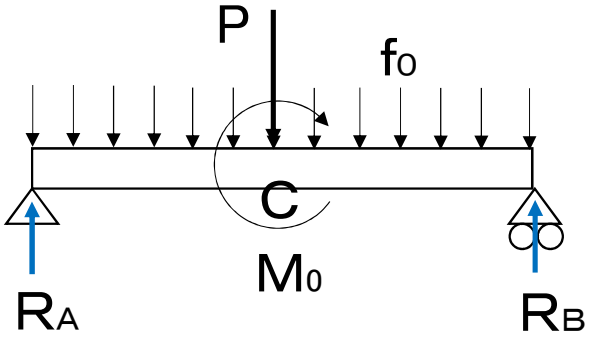




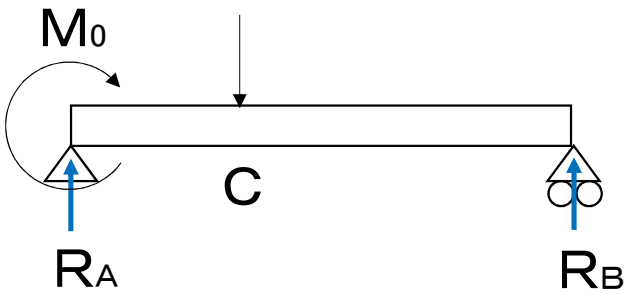




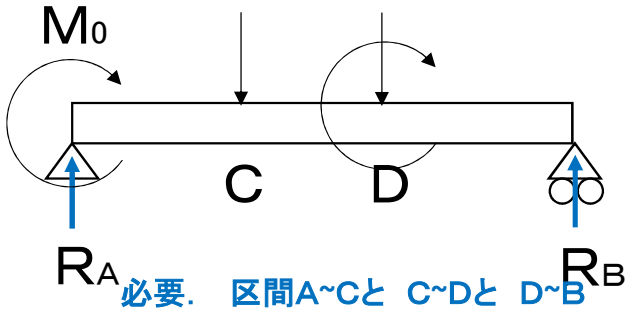




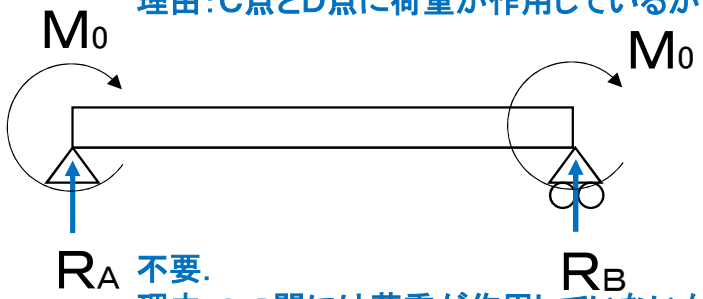
＜答え＞



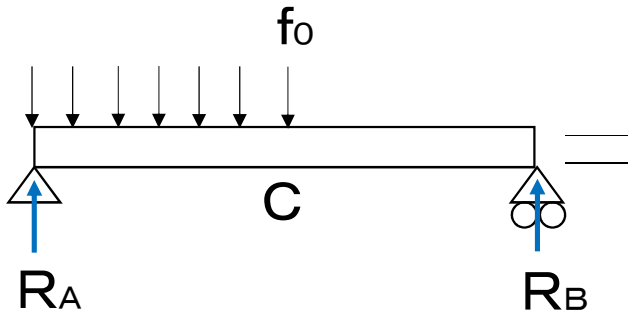
必要.　区間A~C　と　C~B
理由：C点に荷重が作用しているから.



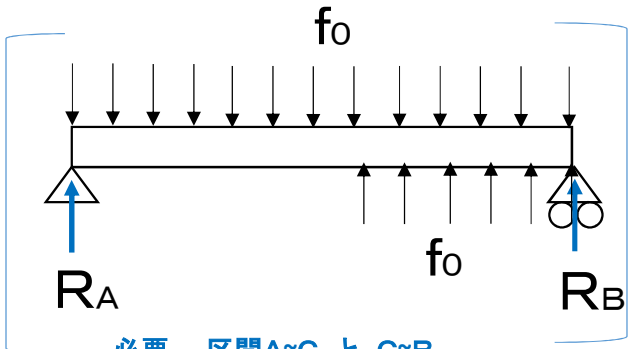
必要.　区間A~Cと　C~Dと　D~B
理由：C点とD点に荷重が作用しているから.



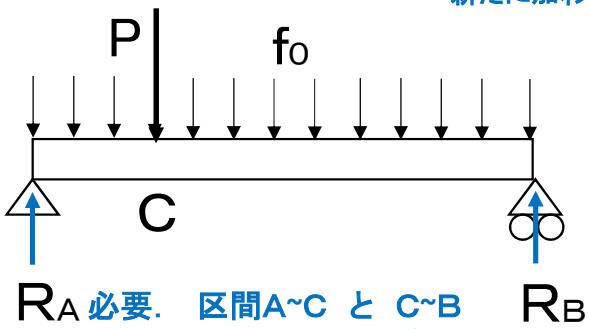
不要.
理由：A~B間には荷重が作用していないから.



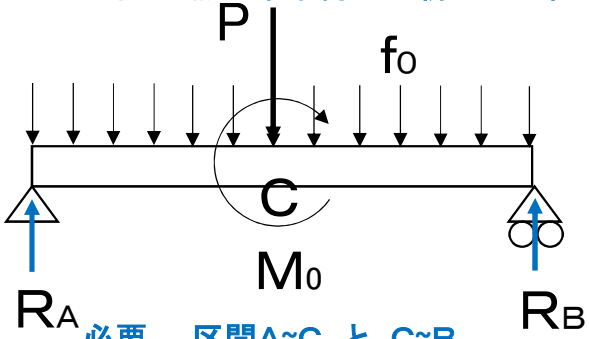
必要.　区間A~C　と　C~B
理由：C～Bでは分布荷重がなくなっているから.



必要.　区間A~C　と　C~B
理由：C～Bでは逆向きの分布荷重が新たに加わっているから



必要.　区間A~C　と　C~B
理由：C点で集中荷重が新たに加わっているから.



必要.　区間A~C　と　C~B
理由：C点に集中荷重とモーメントが作用しているから.