材料力学Ⅰ（第12回，7/10）（テキスト第6章）

はりの問題

曲げによって生ずる変形（たわみ）や応力を求める．

＜手順＞

（1）反力を求める．（前回，テキストp77）

（これははりに作用する全外力を求めておくためです）

（2）部材に生ずる内力を求める

断面に生ずる内力のモーメントM（x）を求めることが重要です．

BMD，SFDも書けるようにしてください．

（3）内力のモーメントM（x）から，応力，たわみを計算する．（今回）

＜復習＞内力Q，内力のモーメントM(x)の求め方

(1)集中荷重P_1が作用する場合(右図a).

(1)反力R_A，R_Bを求める.

- 支持方法により生ずる反力を書きこむ(図b).
- はり全体での力，およびモーメントの釣合いから，
  RA，RBを求める.
  (これではりに作用する全荷重が求まった！)

(2)断面Cで仮想的に切断し，内力を求める.

- 断面力QとM(x)を断面に書き込む.
- AC部における力の釣合い，モーメントの釣合いから内力を求める.

(注)この問題では注意が必要です.
区間A～ℓ1と区間ℓ1～ℓで場合分けする必要がある.
なぜなら，区間A～ℓ1では荷重P1が入らないが，
区間ℓ1～ℓでは荷重P1が加わる(計算式が異なる)
途中で荷重が作用していると結果が異なるので，その位置で場合分けしてください

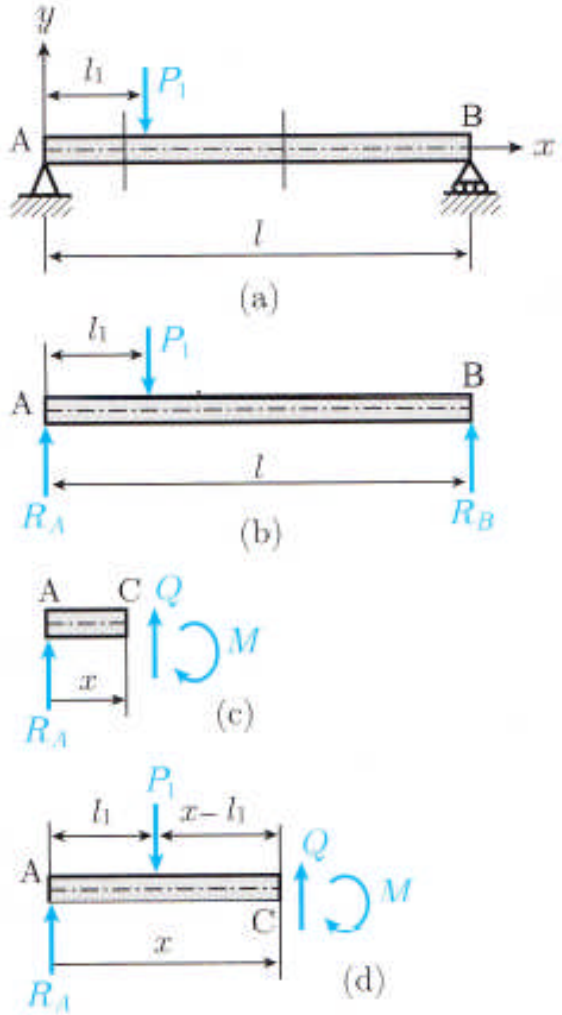


図 6.6　せん断力 Q と曲げモーメント M

ℓ1で荷重P1が加わっているので，
区間A～ℓ1（図c）
区間ℓ1～ℓ（図d）
で場合分けしている．

計算過程は単なる力，モーメントの釣合いなので，
テキストp80を参照してください．

結果のみ示すと，

- 区間A～ℓ1では，

Q＝（ℓ－ℓ1）P1/ ℓ
M(x) = （ℓ－ℓ1） P1/ℓ

- 区間ℓ～ℓ1では，

Q＝ℓ1P1/ℓ
M(x) = ℓ1 P1 (ℓ-x)/ℓ

全区間A～ℓで，Q，M(x)を表すと，
図6.7となる．
Qの図をせん断力図（SFD）
M（x）の図を曲げモーメント図（BMD）という．

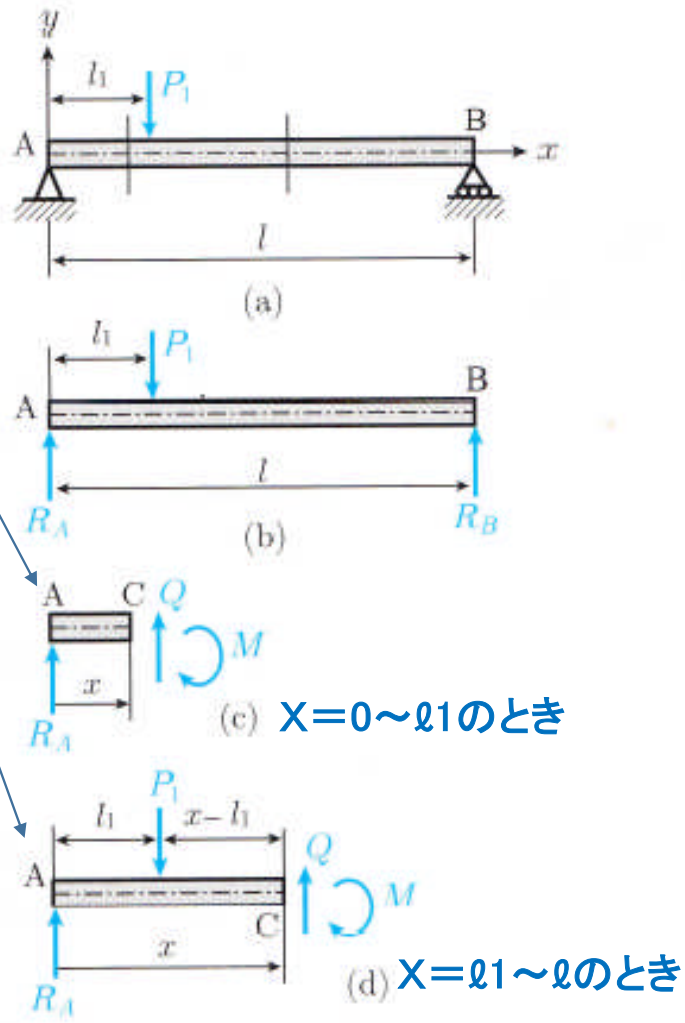


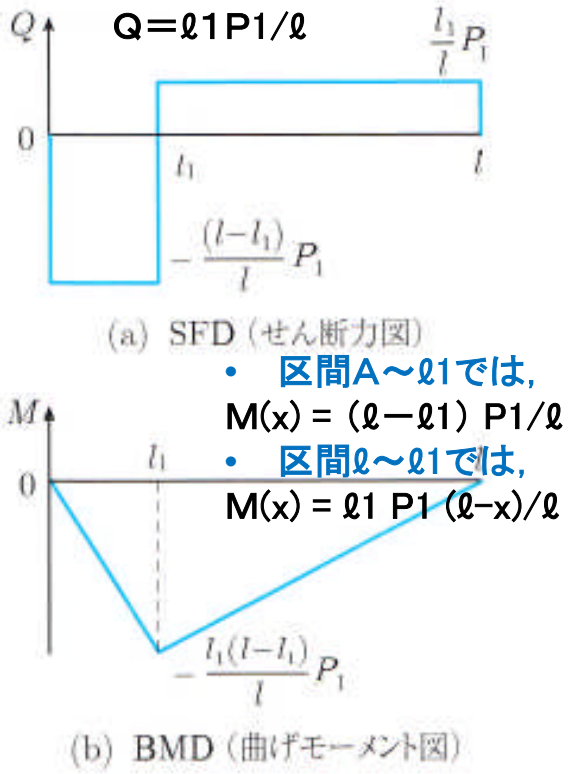
図 6.6　せん断力 Q と曲げモーメント M

- 区間A～ℓ1では，

Q＝（ℓ－ℓ1）P1/ ℓ

- 区間ℓ～ℓ1では，

Q＝ℓ1P1/ℓ



- 区間A～ℓ1では，

M(x) = （ℓ－ℓ1） P1/ℓ

- 区間ℓ～ℓ1では，

M(x) = ℓ1 P1 (ℓ-x)/ℓ

図 6.7　せん断力図と曲げモーメン

＜復習＞分布荷重の場合

この場合，区間分けは不要です．
分布荷重の扱いを覚えてください．等価な荷重に置き換えます．

[例題 6.2]

図 6.9 (a) に示す等分布荷重 f_0 を受ける長さ l の単純支持はりの SFD と BMD を求めよ．

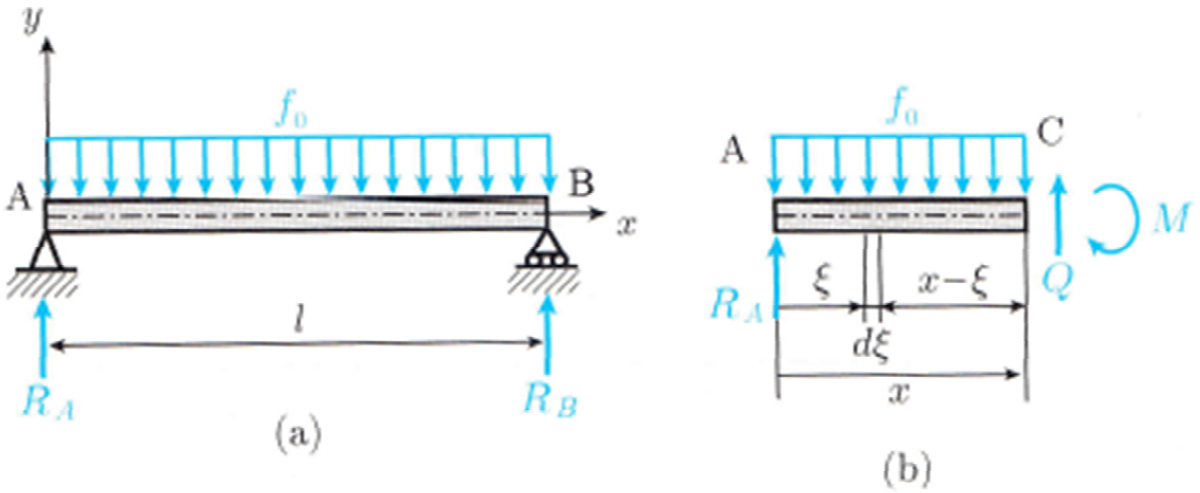
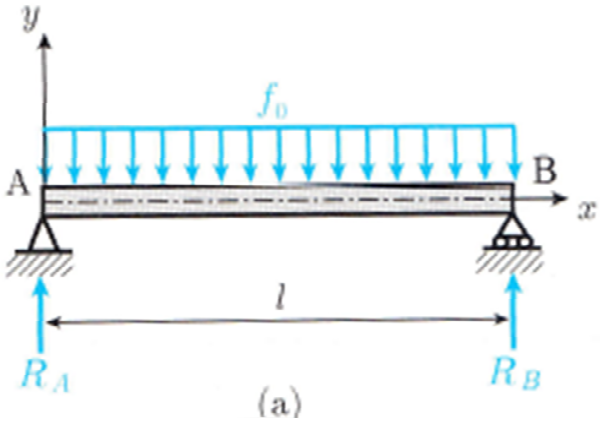
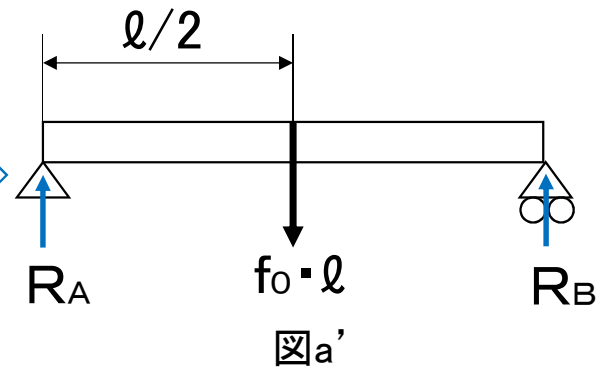


図 6.9　等分布荷重を受ける単純支持はり

(1)反力R_Aを求める.
はり全体の力の釣合いでは,
図aは図a'と等価である.
Y方向の力の釣合いから,
$R_A = R_B = (f_0 \cdot \ell)/2$

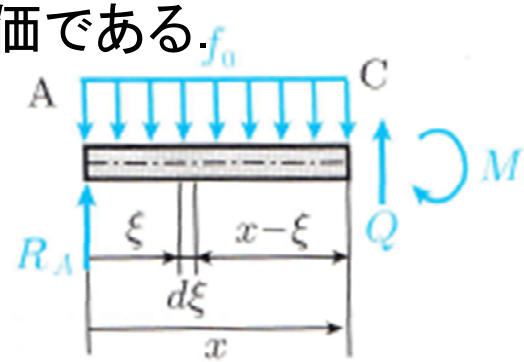


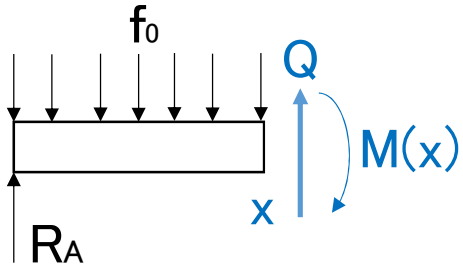


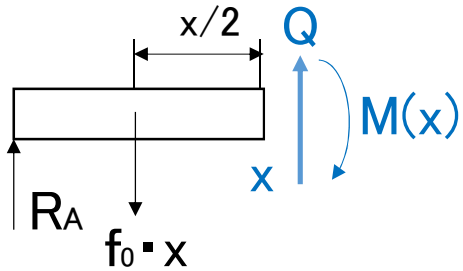
図a'

反力ははり全体の力の釣合いで求めるので, このように書いても図aと等価である

(2)内力Q, M(x)を求める.
区間0～xにおける力の釣合いから求めるが,
図bは図b'と等価である.







図b' 断面力は部材A～xの力の釣合いで求めるので, このように書いても中央の図と等価である

部材A～xにおける力, モーメントの釣合いから,
$R_A + Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = -R_A$
$R_A \cdot x + M(x) - (f_0 \cdot x) \cdot x/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) = -R_A \cdot x + f_0 \cdot x^2/2$

ここから新しい内容です
(3)三角形分布荷重の場合 （テキストp84）

[例題 6.3]

図 6.11 のような分布荷重を受ける単純支持はりのせん断力と曲げモーメントを，式 (6.8) と，式 (6.9) により求め，SFD と BMD を描け．

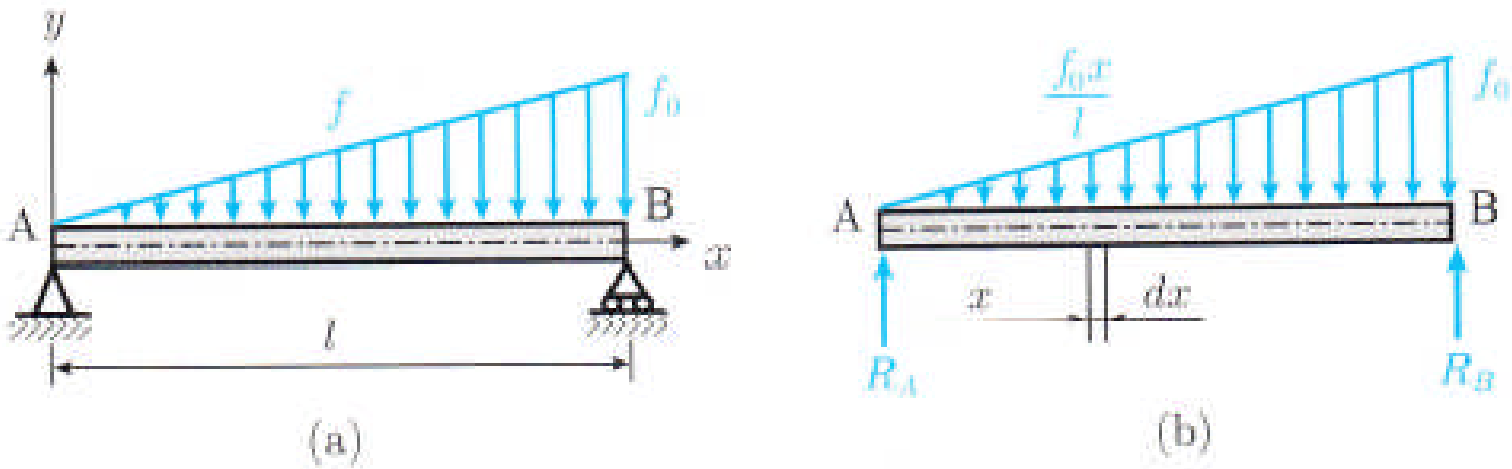
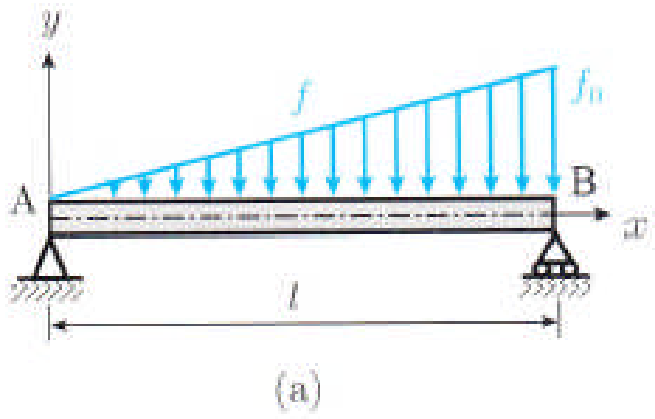


図 6.11　分布荷重を受けるはり

分布荷重の場合

(1)反力R_Aを求める.

はり全体の力の釣合いでは,
図aは図a'と等価である.
(理由)
全荷重は三角形の面積に等しく,
それが三角形の重心に作用している
なお重心はA点から$2\ell/3$の位置にある.



三角形の分布荷重は,
全荷重(三角形の面積)が重心に作用した
場合と等価である.

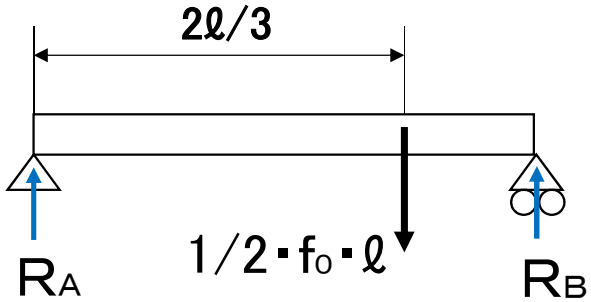
Y方向の力の釣合いから,

$R_A + R_B - (f_0 \cdot \ell)/2 = 0$ ①

B点回りのモーメントの釣合いから,

$R_A \cdot \ell - (f_0 \cdot \ell)/2 \times (2\ell/3) = 0$ ②

①, ②から, $R_A = f_0 \cdot \ell/6$,
$R_B = f_0 \cdot \ell/3$



図a'

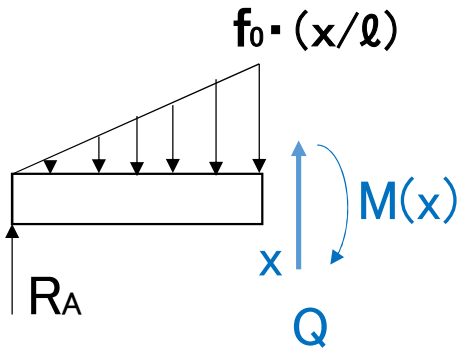
(2)内力Q，M(x)を求める.

区間0～xにおける力の釣合いから求めるが，
図bは図b’と等価である.

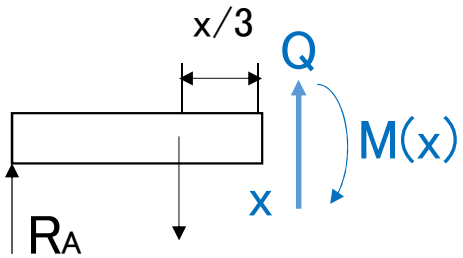
部材0～xにおける力，モーメントの釣合いから，

$R_A + Q - \frac{1}{2} \cdot f_0 \cdot (x/\ell) \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = -R_A + \frac{1}{2} \cdot f_0 \cdot (x/\ell) \cdot x$

$R_A \cdot x + M(x) - \frac{1}{2} \cdot f_0 \cdot (x/\ell)\, x \cdot x/3 = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) = -R_A \cdot x + \frac{1}{2} f_0 (x/\ell) x \cdot x/3$



図b



$\frac{1}{2} \cdot f_0 \cdot (x/\ell) \cdot x$

区間0～xの三角形の面積

図b’ 区間0～xにおける分布荷重は
このように書いても等価である

三角形分布荷重のBMD，SFD

$Q = -R_A + \frac{1}{2} \cdot f_0 \cdot (x/\ell) \cdot x = \underline{\frac{1}{2} \cdot f_0 \cdot (x/\ell) \cdot x - f_0\ell/6}$

$R_A \cdot x + M(x) - \frac{1}{2} \cdot f_0 \cdot (x/\ell)\, x \cdot x/3 = 0 \Rightarrow M(x) = \underline{\frac{1}{2} f_0 (x/\ell) x \cdot x/3 - (f_0\ell/6)x}$

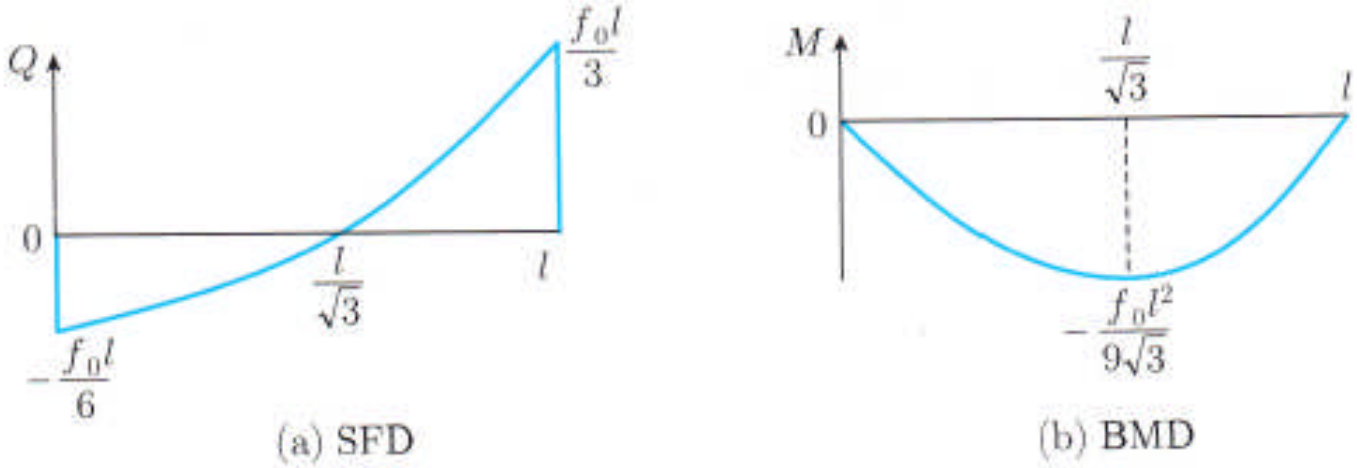
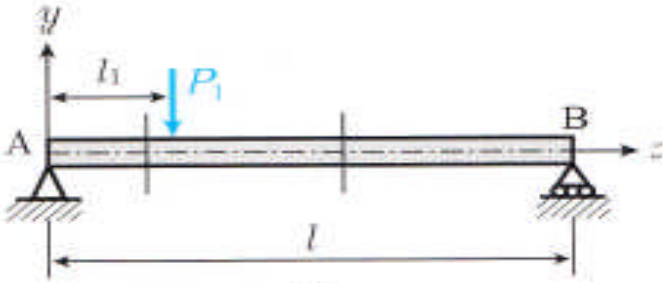


図 6.12　SFD と BMD

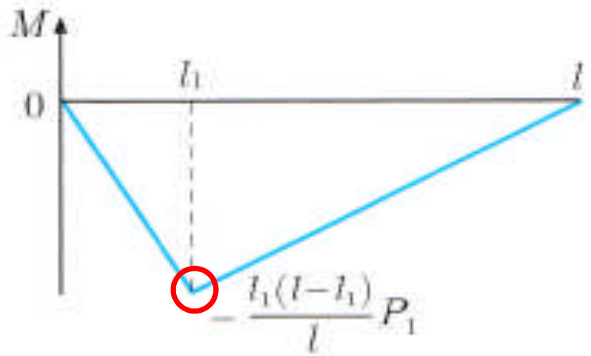
（注）BMDの重要性は何か？

BMDが最大の位置で応力（垂直応力）が最大になる.

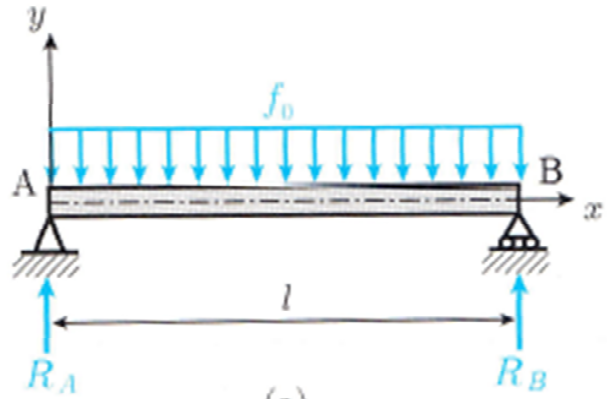
例　単純支持はりの場合　通常中央部で最大となる



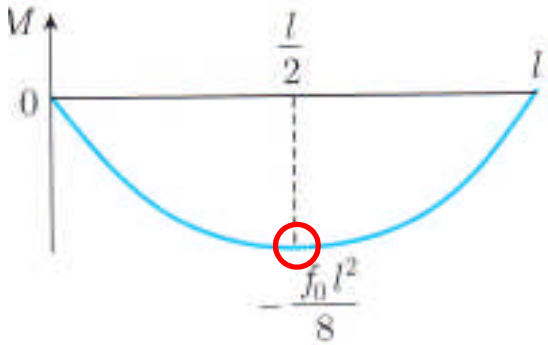
(a)



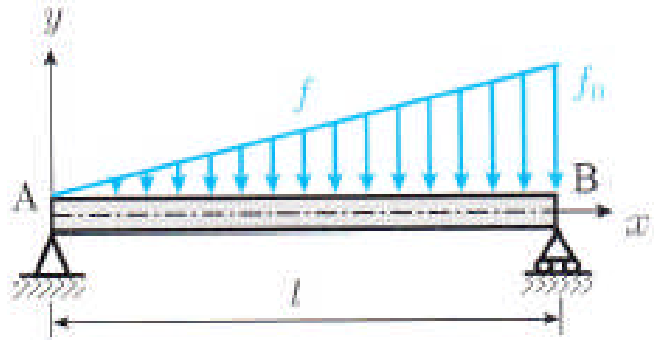
(b) BMD（曲げモーメント図）



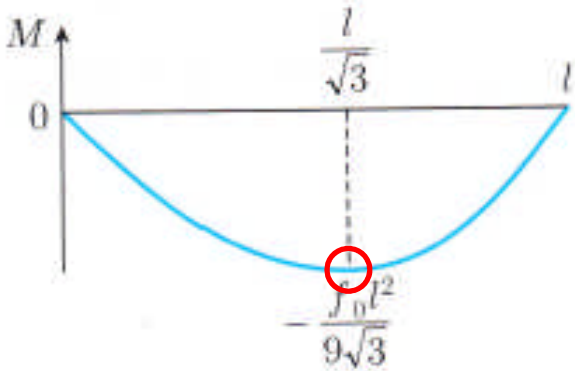
(a)



(b) BMD



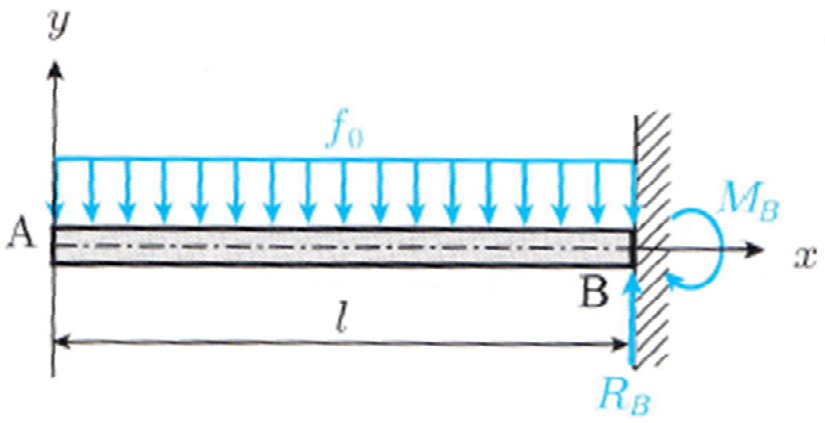
(a)



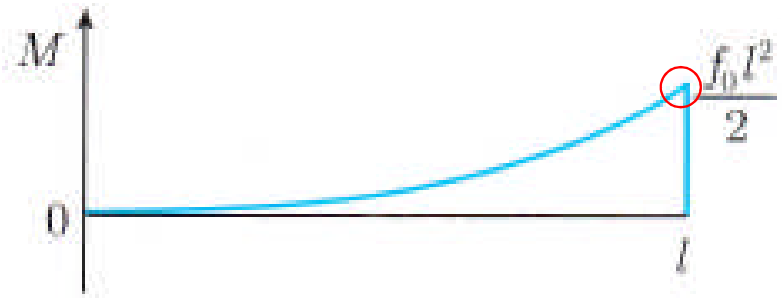
(b) BMD

（例）片持はりの場合

通常，固定端で曲げによる垂直応力は最大となる．



(a)



(b) BMD

曲げ変形（テキストp87）

曲がった状態のはりの断面A'EB'の状態は，
平面を保ち，軸線に垂直

はりの上面は伸び，下面は縮（図6.17），
即ち，上面は引張の垂直応力，下面は圧縮の垂直応力が生ずる．

軸EFは伸び縮みが起こらない．中立軸という．

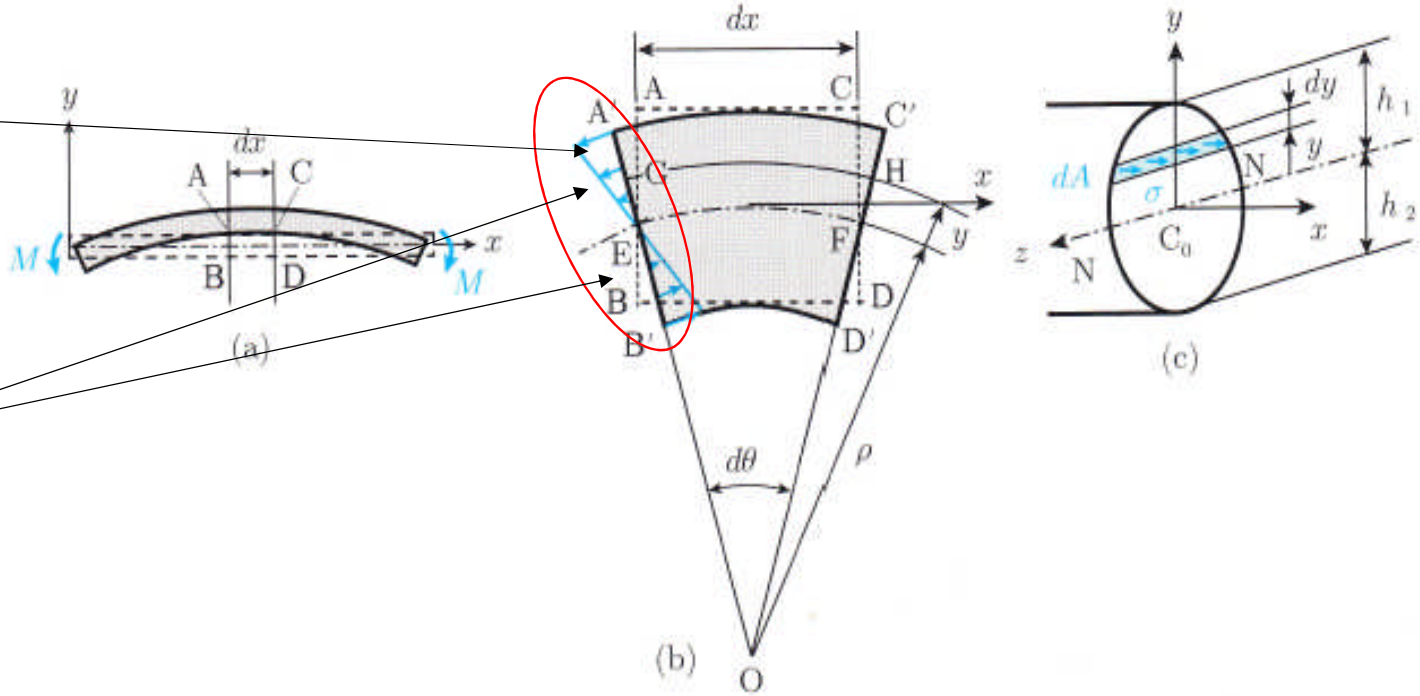


図 6.17　純曲げを受けるはりの変形と応力

（テキストp88）

曲げによって軸方向の2点は円弧となる.
中立軸EFの長さは半径ρ，角度dθからρdθと表せる.
中立軸から半径方向にy離れた円弧GHの長さは(ρ＋y)dθと表せる.
円弧GHの変形前の長さは中立軸の円弧EFと同じであるから，円弧GHのひずみは(6.10)式で表せる.

図 6.17 (b) に示すように，対称面上に座標軸 x, y をとる．dx 部分が曲げを受けると中立面は曲がるが，その長さは変形前と等しく，$EF = dx = \rho d\theta$ である．中立面より y だけ離れた位置のはりの長さは，伸びて GH となる．したがって，そのときのひずみ ε は，

$$\varepsilon = \frac{\widehat{\mathrm{GH}} - \widehat{\mathrm{EF}}}{\widehat{\mathrm{EF}}} = \frac{(\rho + y)\, d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} \qquad (6.10)$$

となる．したがって，はりの断面に生じる応力 σ は，フックの法則から，

$$\sigma = E\varepsilon = E\,\frac{y}{\rho} \qquad (6.11)$$

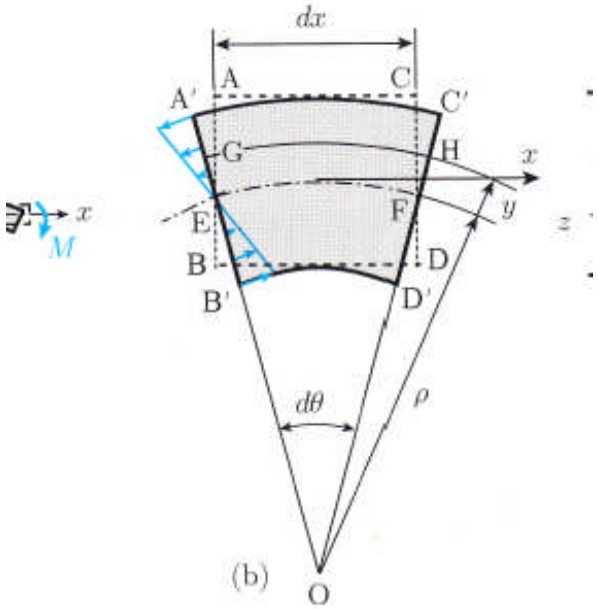


図 6.17　純曲げを受けるはりの変形と応力

（テキストp89）

① 曲げによって生ずる応力の特性

となる．応力 σ は，図 6.17 (b) に示すように中立面上 $y=0$ で $\sigma=0$，距離 y に比例して上側は引張り応力，下側は圧縮応力となる．このはりの断面に働く垂直応力を**曲げ応力** (bending stress) という．はりは曲げモーメ

② 断面に生ずる垂直応力と内力のモーメントM(x)の関係

断面に生ずる垂直応力に面積dsを掛け，中立軸からの距離を掛けたものはその応力による曲げモーメントとなる．これを全断面で積分すると，内力のモーメントMとなるので，

$$M=\int_A y\sigma\,dA=\frac{E}{\rho}\int_A y^2\,dA \qquad (6.14)$$

ここで，

$$I=\int_A y^2\,dA \qquad (6.15)$$

とおくと，

$$M=\frac{EI}{\rho},\qquad \frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI} \qquad (6.16)$$

式 (6.11) と式 (6.16) から，曲げ応力は

$$\boxed{\sigma=\frac{M}{I}y} \qquad (6.17)$$

となる．図 6.17 に示すように，曲げ応力 σ は，中立軸から最も離れた位置で最大 (最小) となる．$M>0$ のとき，$y=h_1$ の上表面の最大引張り応

σ＝最大

σ＝0

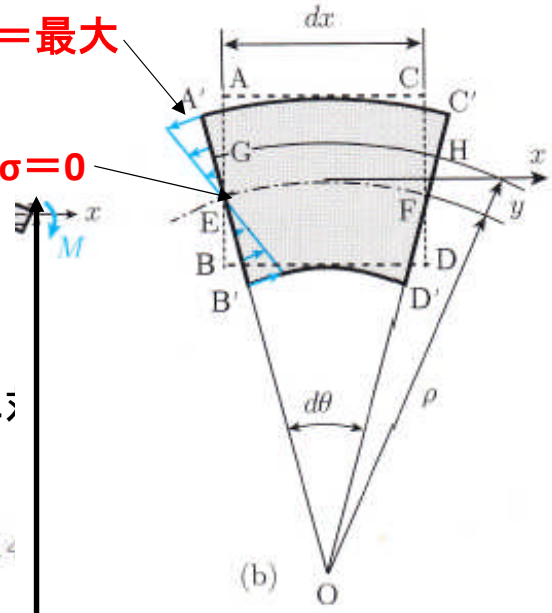


図 6.17 純曲げを受けるはりの変形と応力

③ 断面2次モーメント

定義

$$\boxed{I_z = \int_A y^2\,dA} = \int_{-h/2}^{h/2} by^2\,dy = \frac{bh^3}{12}$$

dA = b・dy

長方形断面の場合，上の積分値は右端の値となる．
（通常断面は長方形なので，この値は覚える）

断面2次モーメントは断面形状による曲がりにくさを表す．
曲がりにくさは，材料のヤング率と断面形状即ち断面2次モーメントに依存する．したがって曲げ剛性はE・Iで表せる．

薄い定規は曲がりやすいが，縦にすると曲がりにくい．これはhが大きくなって断面2次モーメント(I)が大きくなるためである．

（テキストp89）

となる．I は断面の中立軸 NN に関する**断面二次モーメント** (second moment of area) と定義される．式 (6.16) によると，曲げモーメント M が一定で，EI が大きければ，曲率 $1/\rho$ は小さくなり，曲率半径 ρ は大きくなる．したがって，はりは曲がりにくくなるので，EI は曲げ変形に対する抵抗の大きさを表す物理量として**曲げ剛性** (flexural rigidity) と定義されている．

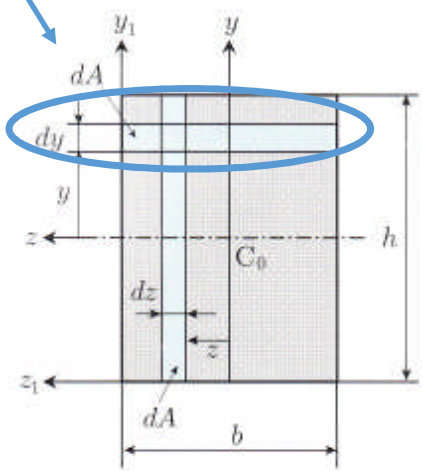


図 6.18　長方形断面

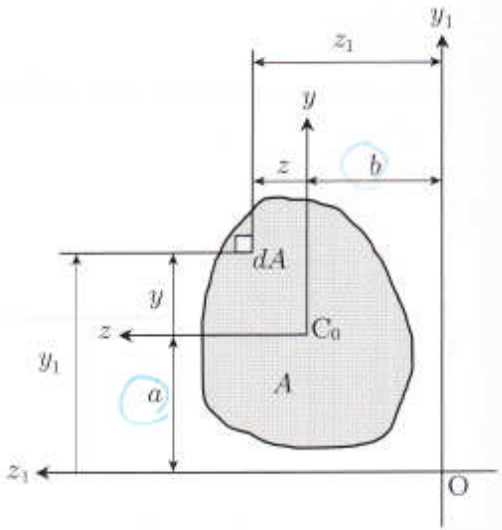


図 6.19　断面二次モーメント

（例）片持はりの最大曲げ応力

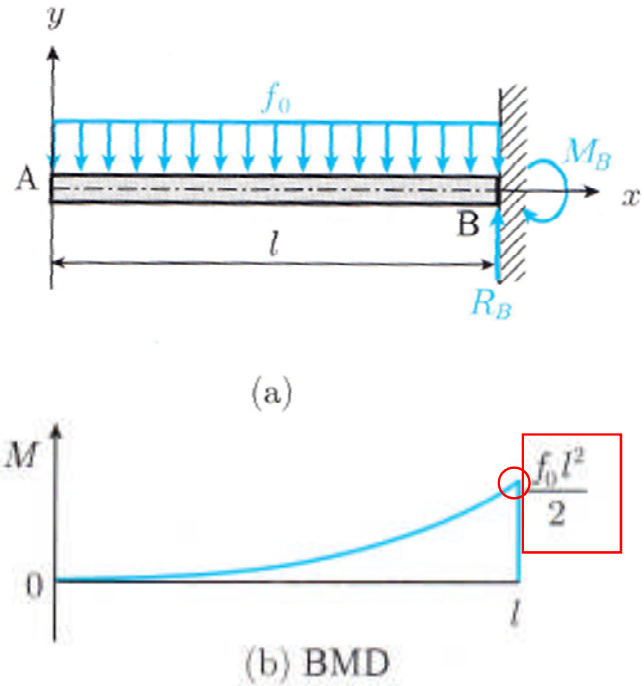
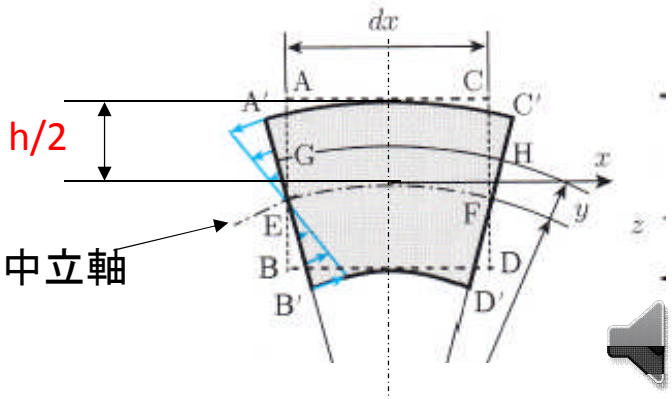
右のBMDから固定端(X=ℓ)で曲げによる垂直応力は最大となり，その値は，

$M(\ell) = f_0 \cdot \ell^2/2$

これを式（6.17）に代入して，

曲げ応力は

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

$\sigma_{max} = f_0 \cdot \ell^2/2 \ / \ (bh^3/12) \times h/2$

長方形断面の断面2次モーメント　　中立軸から最も離れた面のy座標