材料力学Ⅰ（第13回，7/17）（テキスト第6章）

はりの問題

曲げによって生ずる変形（たわみ）や応力を求める．

＜手順＞

（1）反力を求める．（前回，テキストp77）

（これははりに作用する全外力を求めておくためです）

（2）部材に生ずる内力を求める

断面に生ずる内力のモーメントM（x）を求めることが重要です．

最大曲げ応力を求めるためには，BMDが正しく書けることが必要です．

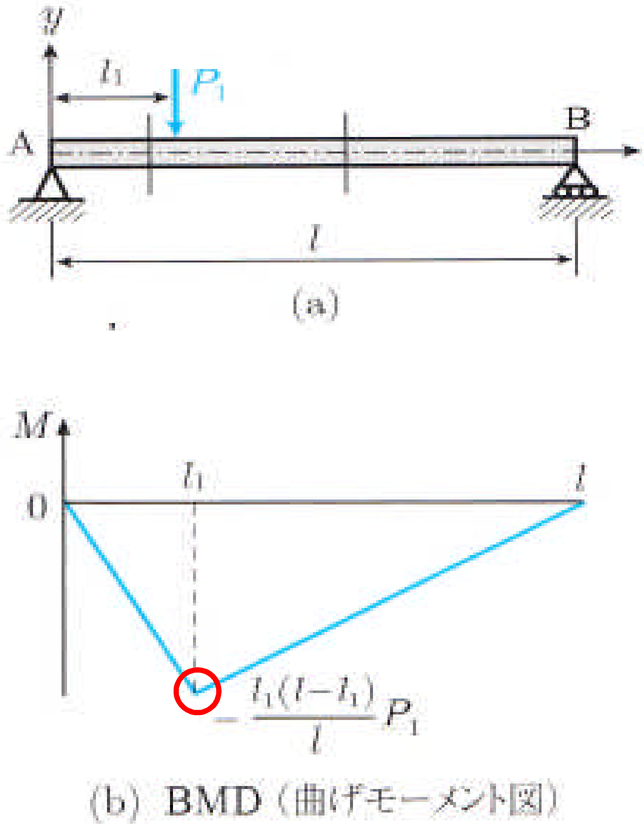
（3）内力のモーメントM（x）から，応力，たわみを計算する．

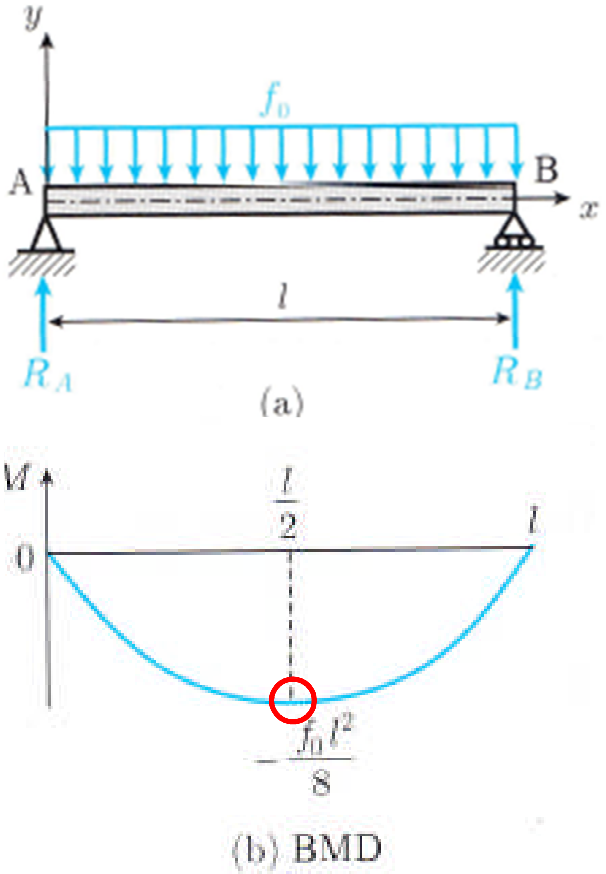
今回は，応力を求めることに関連した<u>断面2次モーメント</u>について主に扱います．

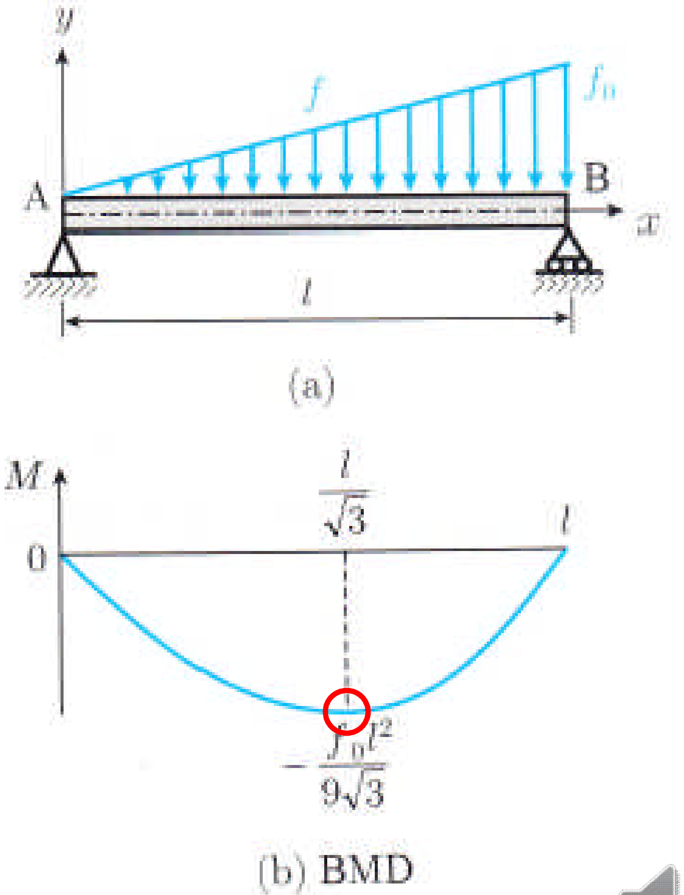
（復習）BMDの重要性：BMDが最大の位置で曲げ応力（垂直応力）が最大になる.

例　**単純支持はりの場合，通常中央部で最大**となる.

　　片持ちはりの場合，<u>固定部</u>で最大となる.







（復習）曲げ変形（テキストp87）

AB断面においては，この位置（点A）が最大応力となる

曲がった状態のはりの断面
A’EB’の状態は，
平面を保ち，軸線に垂直

はりの上面は伸び，下面は圧
縮（図6.17），
即ち，
上面は引張の垂直応力，
下面は圧縮の垂直応力
が生ずる．

軸EFは伸び縮みが起こらない．中立軸という．
（曲げ応力＝0である）

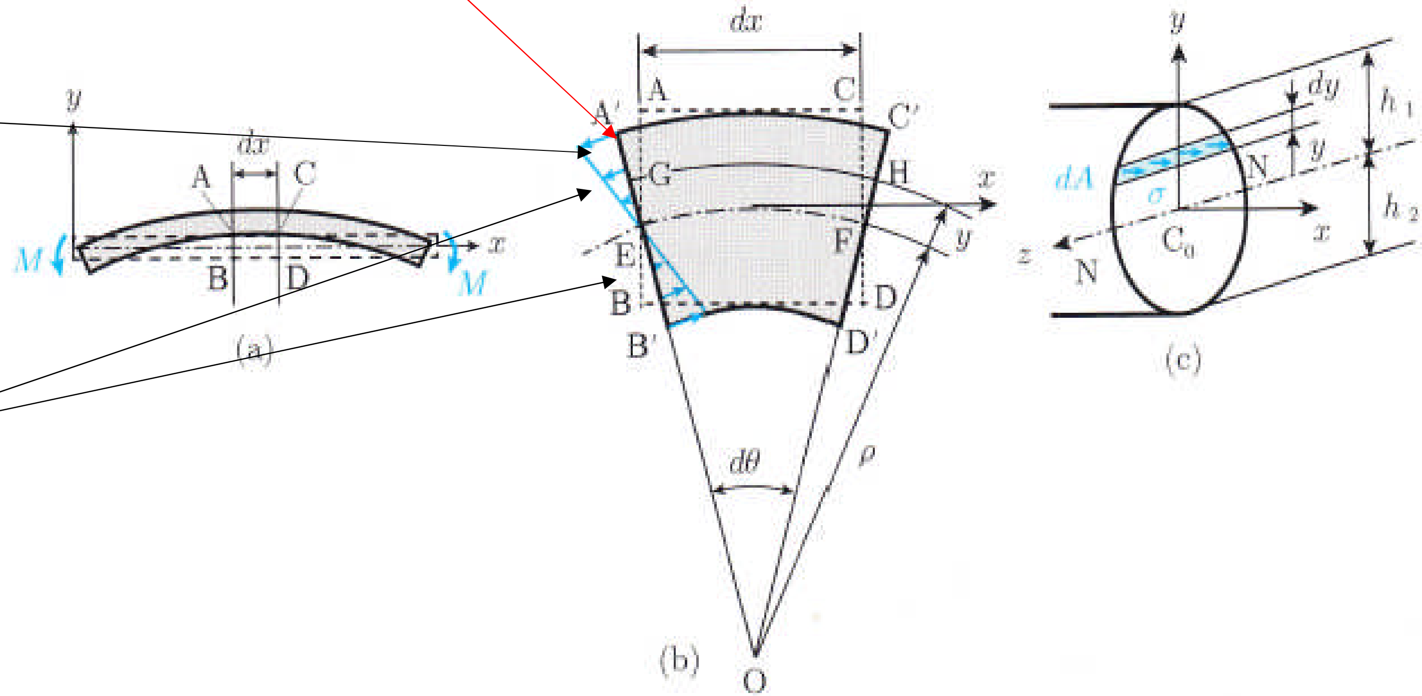


図 6.17　純曲げを受けるはりの変形と応力

（復習）　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（テキストp89）

① 曲げによって生ずる応力の特性

となる．応力 σ は，図 6.17 (b) に示すように中立面上 $y=0$ で $\sigma=0$，距離 y に比例して上側は引張り応力，下側は圧縮応力となる．このはりの断面に働く垂直応力を**曲げ応力** (bending stress) という．はりは曲げモーメ

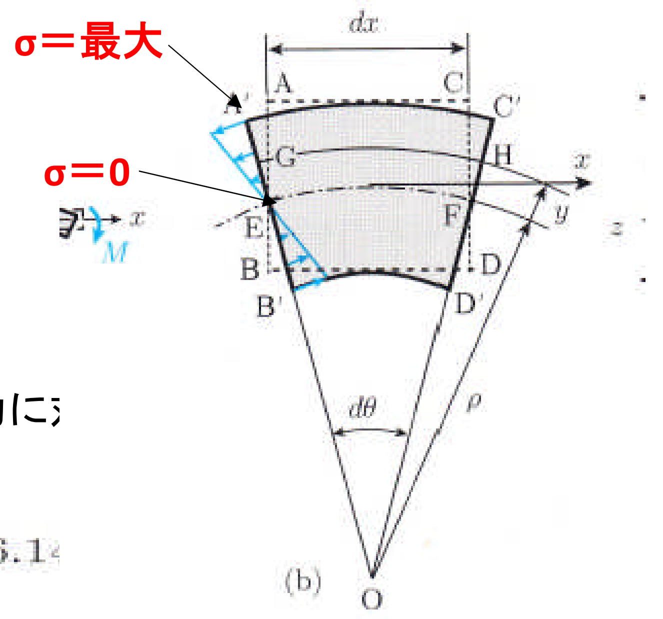


図 6.17　純曲げを受けるはりの変形と応力

② 断面に生ずる垂直応力と内力のモーメントM(x)の関係

断面に生ずる垂直応力に面積dsを掛け，中立軸からの距離を掛けたものはその応力に対る曲げモーメントとなる．これを全断面で積分すると，内力のモーメントMとなるので，

$$M = \int_A y\sigma\, dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2\, dA \qquad (6.14)$$

ここで，

（断面2次モーメント）
$$\boxed{I = \int_A y^2\, dA} \qquad (6.15)$$

とおくと，

$$M = \frac{EI}{\rho}, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad (6.16)$$

式 (6.11) と式 (6.16) から，曲げ応力は

（曲げによる垂直応力）
$$\boxed{\sigma = \frac{M}{I}y} \qquad (6.17)$$
（ある断面においては，y=h/2の位置で最大）

となる．図 6.17 に示すように，曲げ応力 σ は，中立軸から最も離れた位置で最大 (最小) となる．$M>0$ のとき，$y=h_1$ の上表面の最大引張り応

（復習）片持はりの最大曲げ応力

右のBMDから固定端(X=ℓ)で曲げによる垂直応力は最大となり，
その値は，

$M(\ell) = f_0 \cdot \ell^2/2$

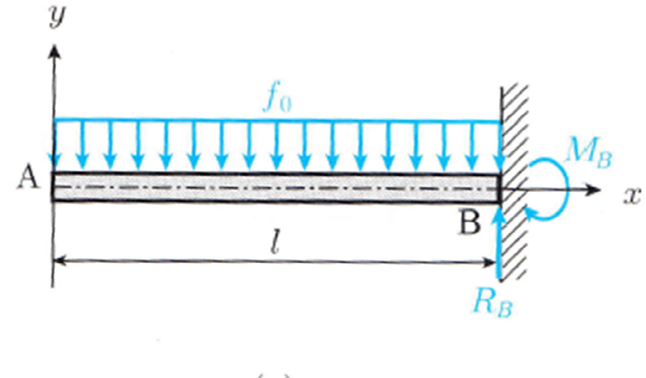
曲げ応力は

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

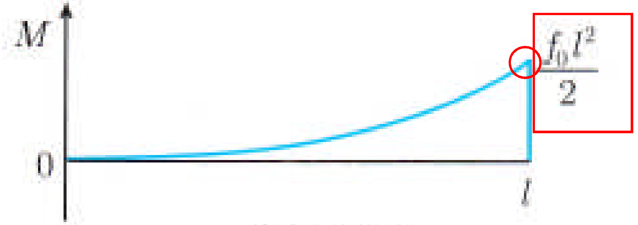
これを式（6.17）に代入して，

$\sigma_{max} = f_0 \cdot \ell^2/2 \;/\; (bh^3/12) \times h/2$

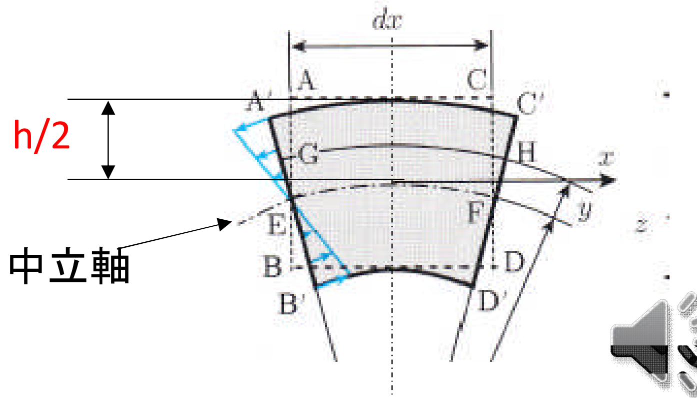
長方形断面の断面2次モーメント　　中立軸から最も離れた面のy座標



(a)



(b) BMD



③ 断面2次モーメント

dA = b・dy

定義

$$\boxed{I_z = \int_A y^2 dA} = \int_{-h/2}^{h/2} by^2\,dy = \frac{bh^3}{12}$$

長方形断面の場合，上の積分値は右端の値となる．
（通常断面は長方形なので，この値は覚える）

<u>これは何を意味するものか</u>（重要）

- **断面2次モーメントは断面形状による曲がりにくさを表す．**
- **曲がりにくさは，材料の剛性（ヤング率E）と断面形状即ち断面2次モーメントIに依存する．**

したがって，E×Iを曲げ剛性という．

薄い定規は曲がりやすいが，縦にすると曲がりにくい．これはhが大きくなって断面2次モーメント(I)が大きくなるためである．

剛性の高い材料でなくても，曲がりにくくできる．断面2次モーメントが大きくなるように断面設計をする．これをコンプライアンス設計という．
（機械の設計において重要，例：アルミニウムのアングル材など）

（テキストp89）

となる．I は断面の中立軸 NN に関する**断面二次モーメント** (second moment of area) と定義される．式 (6.16) によると，曲げモーメント M が一定で，EI が大きければ，曲率 $1/\rho$ は小さくなり，曲率半径 ρ は大きくなる．したがって，はりは曲がりにくくなるので，EI は曲げ変形に対する抵抗の大きさを表す物理量として**曲げ剛性** (flexural rigidity) と定義されている．

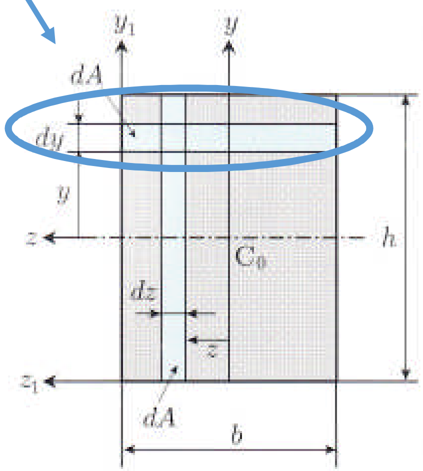


図 6.18　長方形断面

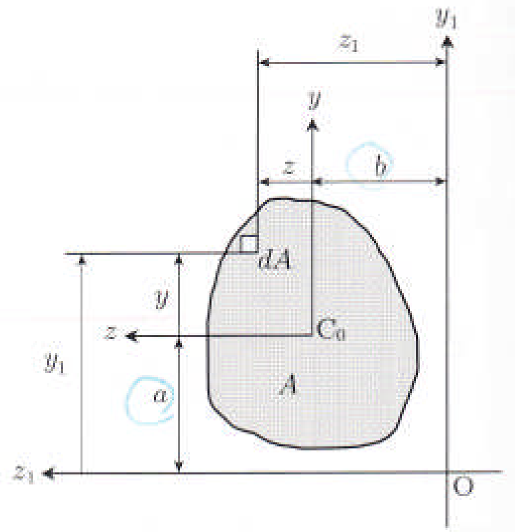


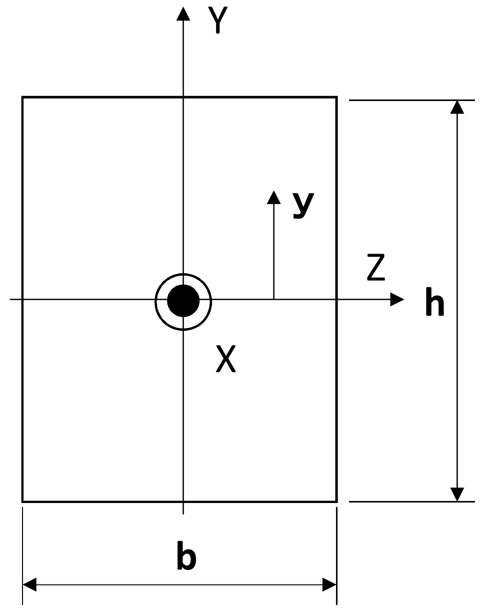
図 6.19　断面二次モーメント

断面2次モーメント

定義

$$I_z = \int_A y^2 \, dA$$

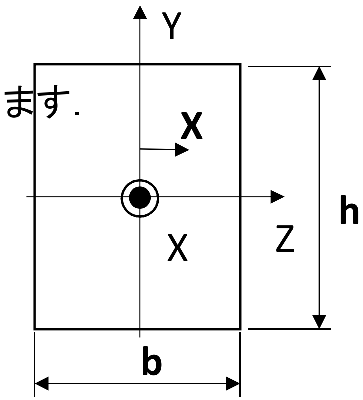
長方形断面　幅b，高さhのとき，$I_z = \dfrac{bh^3}{12}$



（注）yはZ軸からの距離なので，
基準とするZ軸を添え字zで表します．
なおここでは添え字zを省略して単にIと書きます．

y^2の積分なので，yが大きい断面形状にするとIは大きくなる．即ち，縦長の断面，I型の断面（鉄道のレールなど）はIが大きく，曲がりにくい．

（注）もしMyによってはりが曲がる場合は，I yを用います．



$$I_{\boldsymbol{y}} = \int_A x^2 \, dA$$

$$I_y = \frac{b^3 h}{12}$$

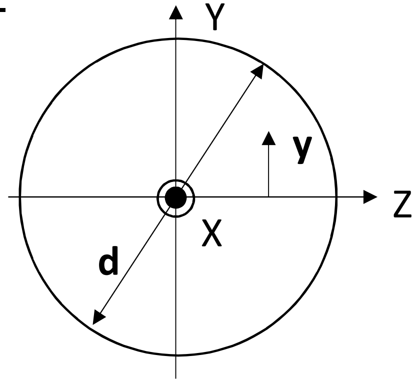
断面2次モーメント

定義

$$I_z = \int_A y^2 \, dA$$

丸断面　直径dのとき,

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}$$



同じ断面積の場合，断面2次モーメントが大きくなる場合を断面効率が高いという.

円よりも長方形の方が断面効率が良いことを知っておいてください.

(注) 長方形断面をb×hとすると，円の直径は，D=(bh/π)$^{0.5}$　となる．それぞれのIを上記の式から計算してみてください.

［例題 6.7］

図 6.21 (a) の半径 r_0 の円形断面と (b) の中空円形断面の図心 C_0 を通る z 軸に関する断面二次モーメントを求めよ.

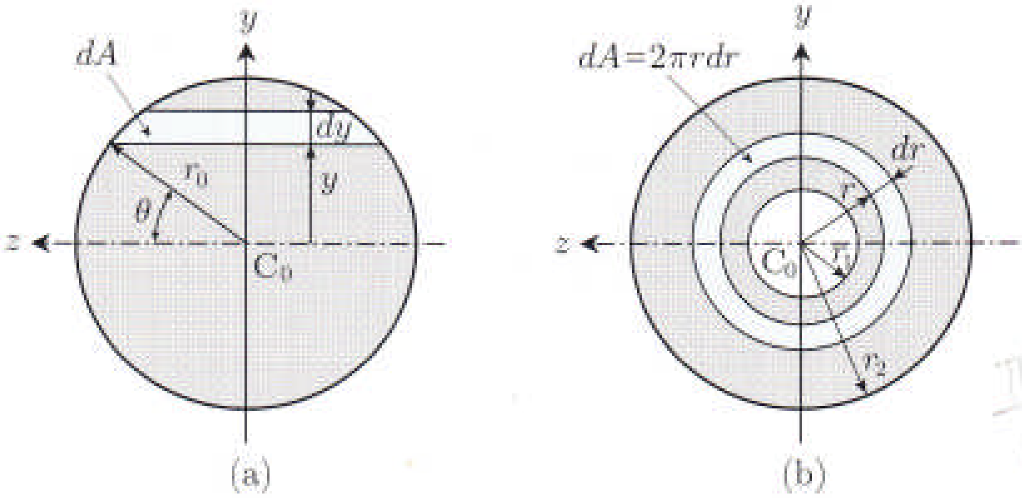


図 6.21　円形断面

$\frac{\pi d^4}{64}$

［解］　この場合の $dA = 2\sqrt{r_0^2 - y^2}\,dy$ に，$y = r_0 \sin\theta$ と $dy = r_0 \cos\theta\,d\theta$ を代入すると $dA = 2r_0^2 \cos^2\theta\,d\theta$ となるから

$$I_z = \int_A y^2\,dA = 2\int_0^{\pi/2} y^2\,dA = 4r_0^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi r_0^4}{4} \tag{6.25}$$

いろいろな断面の断面2次モーメントを求める

（1）中空部がある場合

全体のIから中空部のI_1を引く

（2）中立軸が同じ部分の組合せ形状

各部のIを合計する

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

図2-2の場合，
①と②の計算は注意が必要です．
理由は，中立軸（z軸）が図心を通っていないからです．
このような場合は次の**平行軸の定理**を使って求めます．

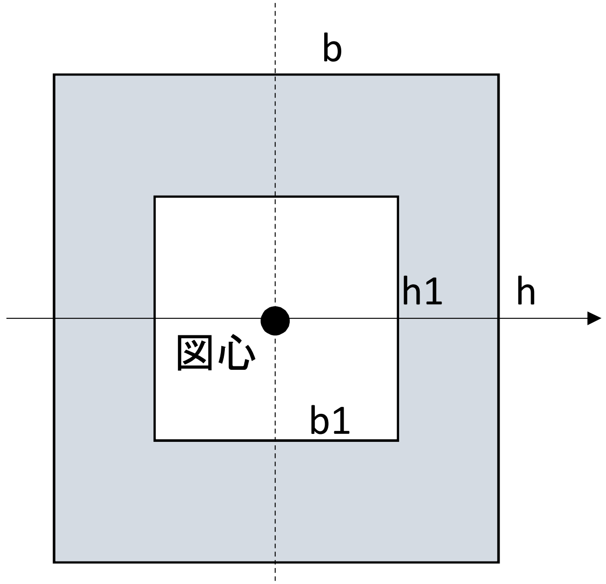


図1-1

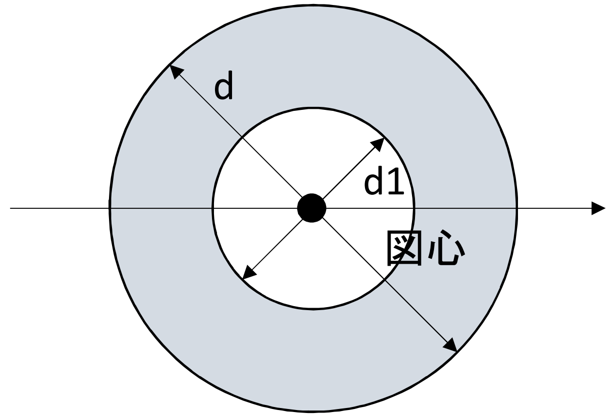


図1-2

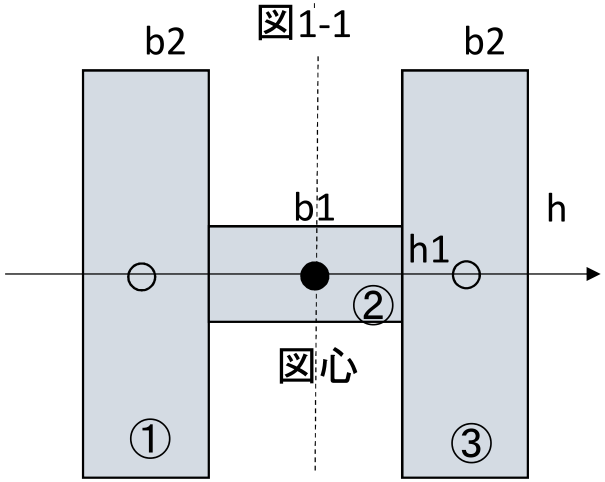


図2-1

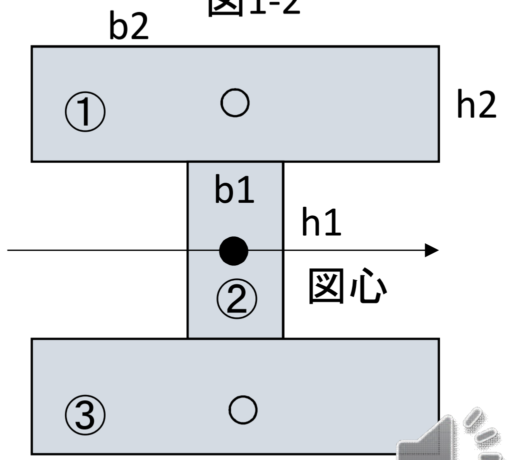


図2-2

平行軸の定理

Z軸ではなく，平行なZ$_1$軸の場合：　　$I_{z1} = I_z + \boxed{a^2A}$

これを加える

となる．図 6.19 に示すように断面 A の図心 C_0 を通る z 軸および y 軸に対して，z 軸に平行で a だけ離れた z_1 軸，また y 軸に平行に b だけ離れた y_1 軸の座標系において，z_1 軸に関する断面二次モーメント I_{z1} は，式 (6.15) の定義から，

$$I_{z1} = \int_A y_1^2\,dA = \int_A (a+y)^2\,dA$$
$$= a^2A + 2a\int_A y\,dA + \int_A y^2\,dA$$

となる．図心を通る z 軸に関する断面一次モーメントは

$$S = \int_A y\,dA = 0$$

であるから，

$$I_{z1} = \boxed{a^2A} + I_z \tag{6.22}$$

これを加える

同様に，I_{y1} は

$$I_{y1} = b^2A + I_y \tag{6.23}$$

となる．式 (6.21) と式 (6.23) の関係を平行軸の定理 (parallel axis theorem) といい，平行な 2 つの軸の間の断面二次モーメントの関係を表す．

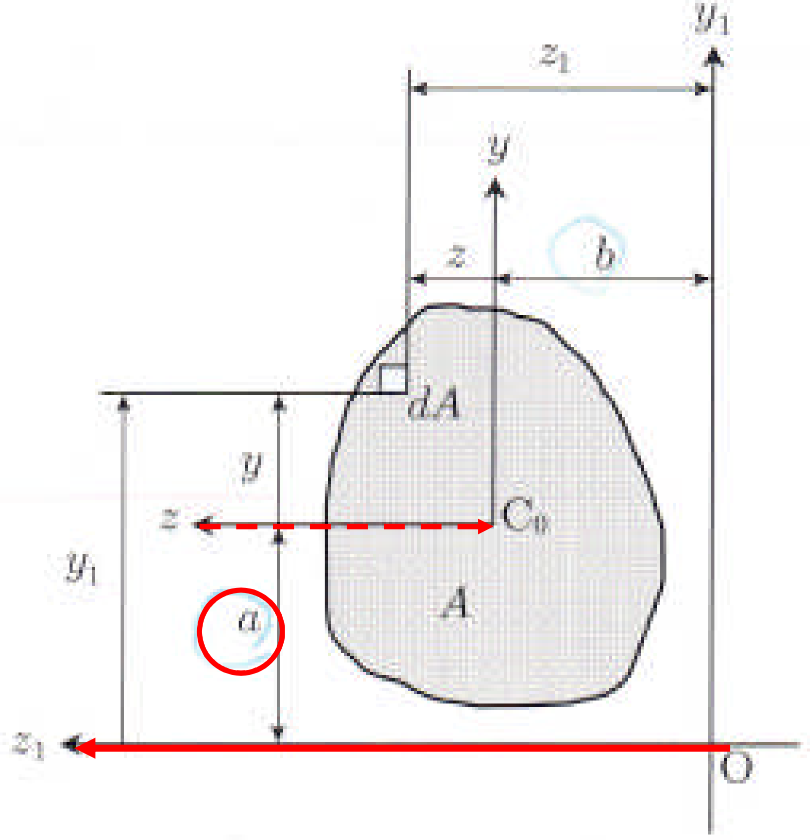


図 6.19　断面二次モーメント

テキスト例題

平行軸の定理を用いて，全体のIを求めてください．

［例題 6.8］

図 6.22 の I 型断面の中立軸に関する断面二次モーメントを求めよ．また，$b = 200$ mm，$h = 300$ mm，$b_1 = 25$ mm，$h_1 = 20$ mm とし，曲げモーメント $M = 150$ kN·m のときの曲げ応力分布を求めよ．

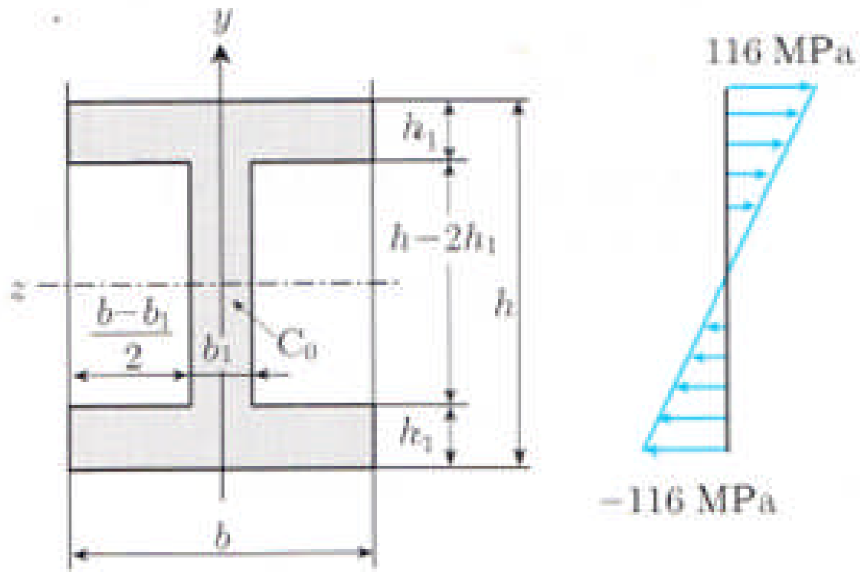


図 6.22　I 型断面と曲げ応力

（答）

A1

$I_1 = bh_1^3/12$
$+\{(h-2h_1)/2+h_1/2\}^2 \cdot b\,h_1$

平行軸の定理

A2

$I_2 = b_1(h-2h_1)^3/12$

A3

$I_3 = I_1$

以上の和を取り，

$I = I_1 + I_2 + I_3$

［例題 6.8］

図 6.22 の I 型断面の中立軸に関する断面二次モーメントを求めよ．また，$b = 200$ mm，$h = 300$ mm，$b_1 = 25$ mm，$h_1 = 20$ mm とし，曲げモーメント $M = 150$ kN·m のときの曲げ応力分布を求めよ．

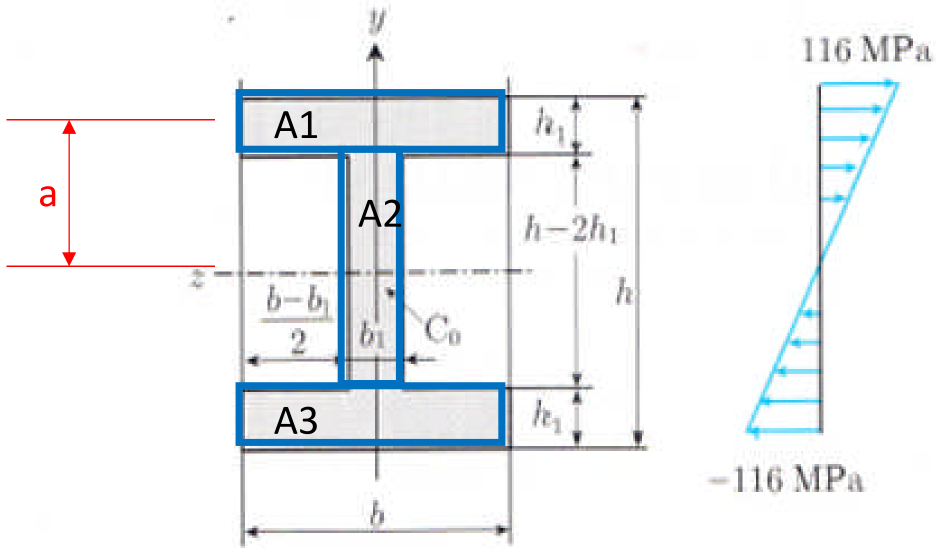


図 6.22　I 型断面と曲げ応力

（参考）
この場合，
平行軸の定理を使わない方法でも求められます．
どうしたらいいでしょうか？

（答）
全体のA_0のIから，
A_1，A_2部のIを引く

この場合，A_1，A_2のIは同じ値です．

（注）
前の平行軸を用いる場合と同じ結果になることを確認してみてください．

［例題 6.8］

図 6.22 の I 型断面の中立軸に関する断面二次モーメントを求めよ．また，$b = 200$ mm，$h = 300$ mm，$b_1 = 25$ mm，$h_1 = 20$ mm とし，曲げモーメント $M = 150$ kN·m のときの曲げ応力分布を求めよ．

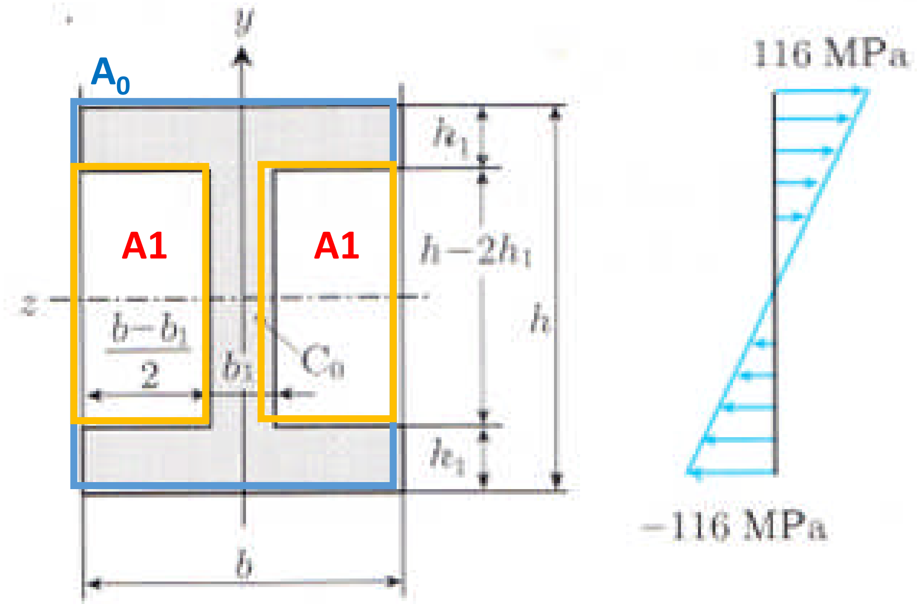


図 6.22　I 型断面と曲げ応力