材料力学Ｉ（第14回，7/24）（テキスト第6章）

はりの問題

曲げによって生ずる変形（たわみ）や応力を求める．

＜手順＞

（1）反力を求める．（テキストp77）

（これははりに作用する全外力を求めておくためです）

（2）部材に生ずる内力を求める

断面に生ずる内力のモーメントM（x）を求めることが重要です．

最大曲げ応力を求めるためには，BMDが正しく書けることが必要です．

（3）内力のモーメントM（x）から，応力，たわみを計算する．

後期はテキストp97のはりのたわみから始めます．

たわみの計算もM（x）から始まるので，この求め方は確実に理解しておいてください．

<復習＞

今まで2章で引張，6章で曲げを学びました.
引張も曲げも生ずる応力は垂直荷重です.
そこで各場合の応力を計算することにします.

＜問1＞

右に示す各荷重状態において，
各部材に生ずる最大垂直応力（X方向，σ_{max}とする）
を求めなさい.
なお，図1は引張，図2および図3は曲げ変形である.
いずれの部材も長さℓ，断面積A（幅b×高さh），同じ材料とする.

スライドをめくらずに，まず自分で解いてください.
時間は各場合とも1分以内とします.

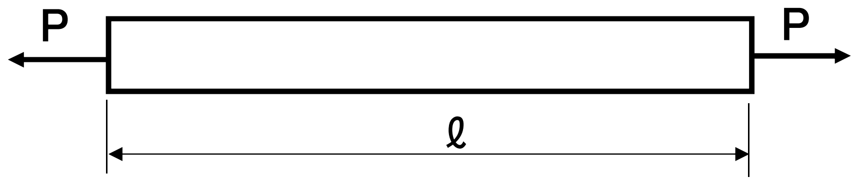


図1

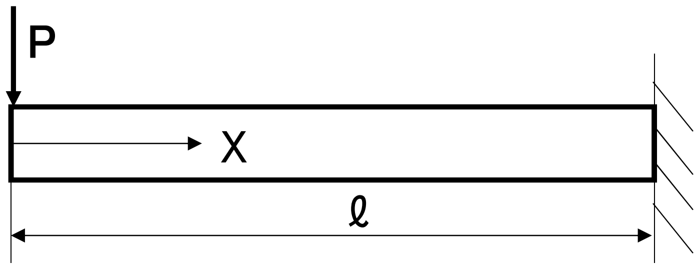


図2

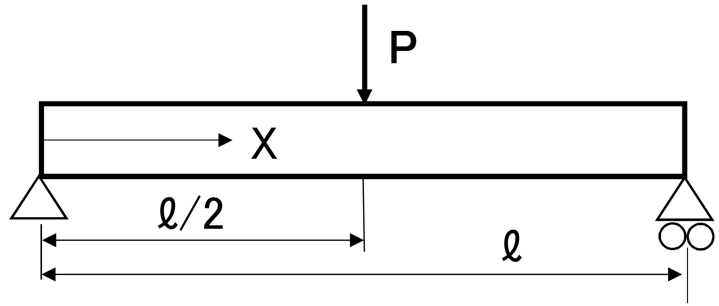


図3

＜解答＞

図1

最大応力は，σmax = P/A

軸方向(x)のどの位置においてもこの値である.

図2

最大応力は，x＝ℓ（固定端）で生じ，値は，

$$\sigma_{max} = P/A \times \frac{6\ell}{h}$$

図3

最大応力はx＝ℓ/2で生じ，値は

$$\sigma_{max} = P/A \times \frac{3\ell}{2h}$$

（正解できましたか？）

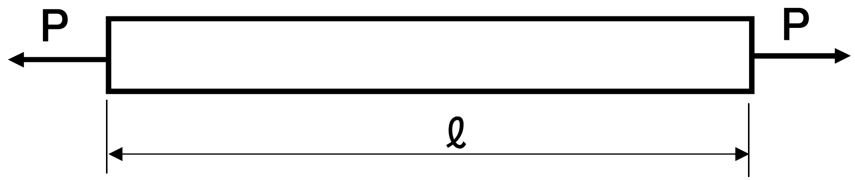


図1

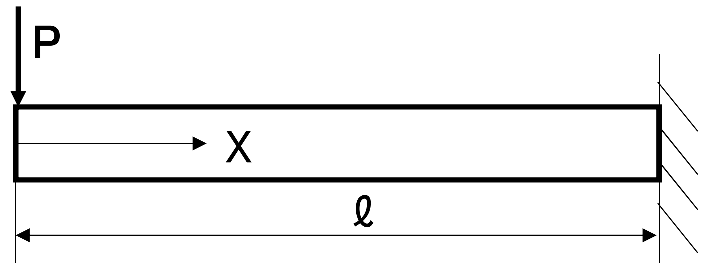


図2

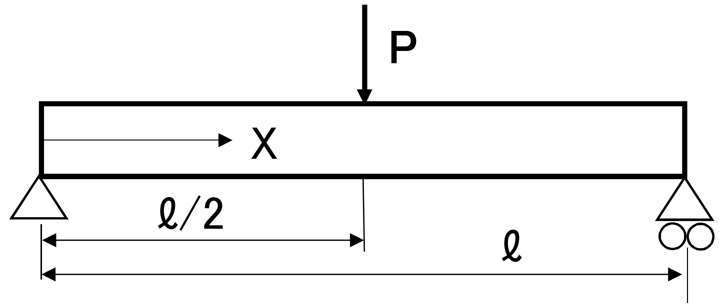


図3

＜解説＞

図2

最大応力は，σmax = P/A $\times \frac{6\ell}{h}$

(理由)

$\sigma = \frac{M(x)}{I} \times \frac{h}{2}$

ここでBMDより，Mmax(ℓ)=Pℓ

長方形断面では，I＝bh^3/12

図３

最大応力は，σmax = P/A $\times \frac{3\ell}{2h}$

(理由)

$\sigma = \frac{M(x)}{I} \times \frac{h}{2}$

ここでMmax(ℓ/2)=Pℓ/4,

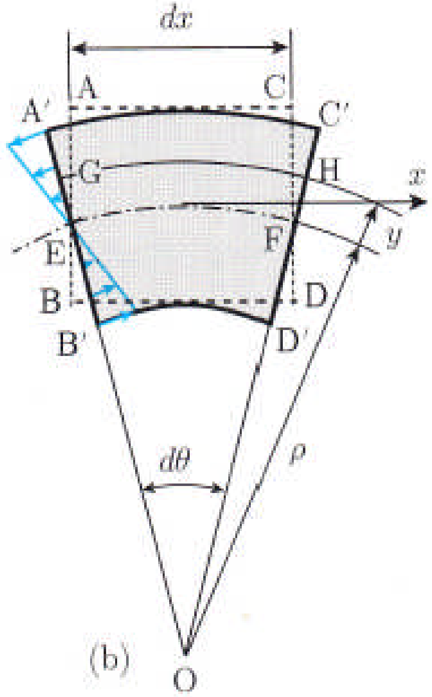
I＝bh^3/12

曲げ応力は

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

(1) どの断面(X)で最大応力が生ずるかは，BMDが最大となる位置(X)からわかる．

(2)もしAB断面だとすると，y＝h/2の位置で最大応力となる



テキストp88, p89

＜解答＞

図1

最大応力は，σmax = P/A

図2

最大応力は，σmax = P/A $\times \dfrac{6\ell}{h}$

図3

最大応力は，σmax = P/A $\times \dfrac{3\ell}{2h}$

Q:どの場合が応力が大きいでしょうか？

Ans.

図2＞図3＞＞図1

長さℓ/高さh>>1なので，図2および図3の最大応力は，図1に比べて数10～数100倍になります．

即ち，引張よりも曲げの方がはるかに大きな応力が生ずることを覚えておいてください．

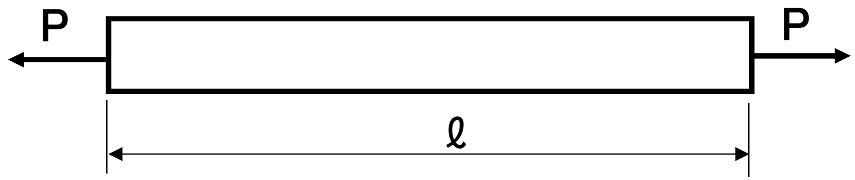


図1

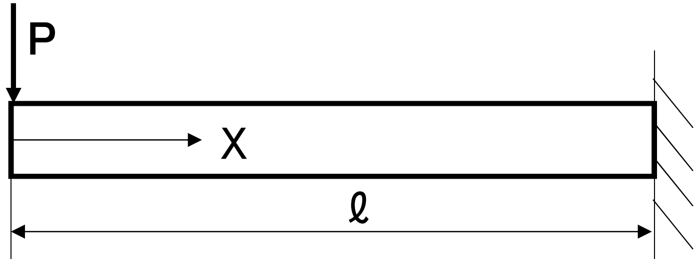


図2

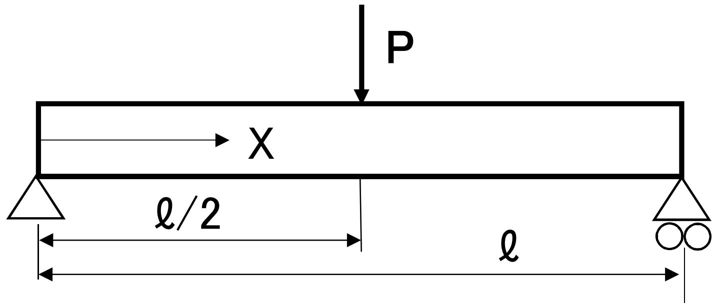
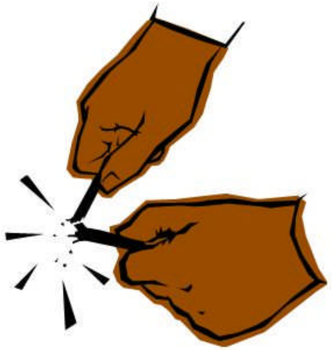


図3

引張よりも<u>曲げの方がはるかに大きな垂直応力</u>が生ずる　ことを覚えておいてください.

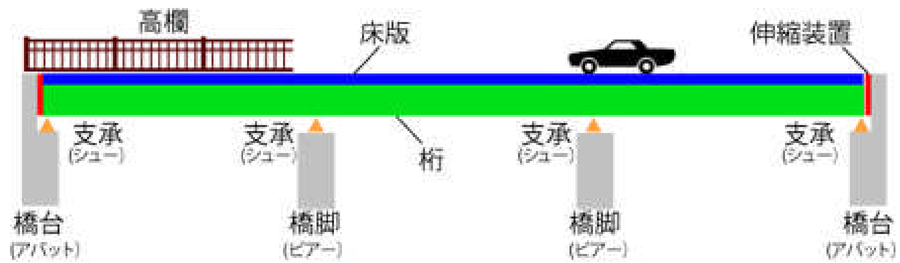
例１　棒を２つにしてください
というとき，引張る人はいません.
ほぼ全員が曲げます.



例２　空手で板を２つにしてください
というとき，引張る人はいません.
両端を支持して，中央に荷重をかけます.

例３　長大橋で，“はり”型の橋はありません.
全て吊り橋です.

長くなければ，“はり”型の橋が良く使われます.
（吊り橋より構造が単純で，工事が簡単）



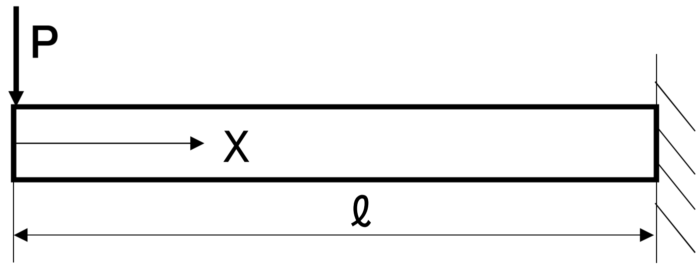
機械の場合も，引張によって壊れることは少なく，
壊れる場合の原因はほぼ曲げ（による垂直応力）です．

このような理由から，
材力では，引張よりも曲げの問題が良く出されます．

＜問2＞

右の片持はりにおいて，
せん断応力を求めなさい．

求めたら垂直応力と比較して
考察してください．



＜問2＞解答

せん断応力　$\tau = P/A$

せん断応力は引張応力と同じ大きさです．

即ち，曲げによって生ずる垂直応力に比べはるかに小さい値なので，
せん断応力を問題にすることや，せん断変形を問題にすることはあまりありません．

今までの学習でも，BMDを中心にやってきました．
（SFDを書く問題はあまり出していません）

曲げによる垂直応力や曲げ変形を強度において重要とする理由を以上から理解してください．

＜復習＞　断面2次モーメント　（テキストp89）

断面形状による曲がりにくさを表す
(Eは材質による曲がりにくさを表す．
E・Iを曲げ剛性という）

定義

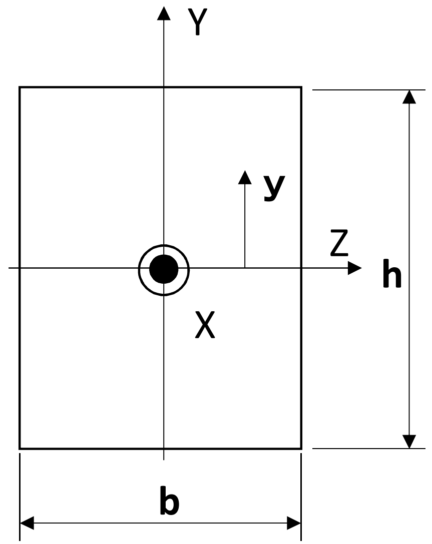
$$I_z = \int_A y^2 \, dA$$

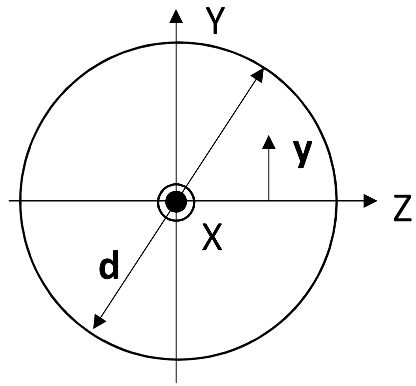
（1）長方形断面　幅b，高さhのとき，

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

（2）円形断面の場合
直径dのとき，

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}$$



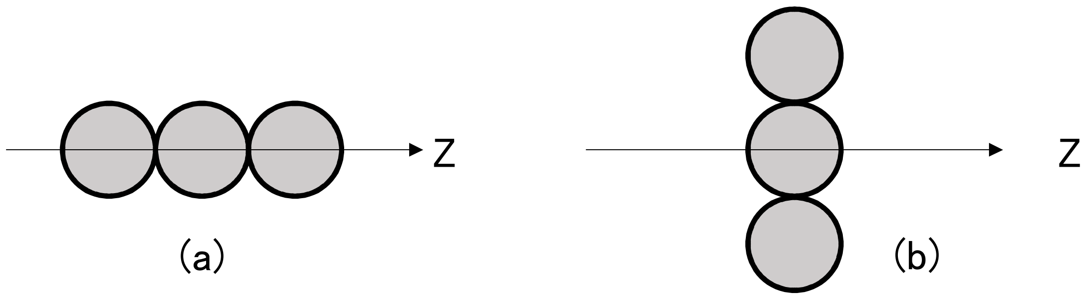


三本の矢の教え

皆さんはこの言葉をご存知ですか？
どこかで聞いたことがあると思いますが,
「戦国武将の毛利元就が、子の隆元・元春（吉川氏に養子）・隆景（小早川氏に養子）に授けたという教え。
一本の矢は容易に折れるが、三本まとめてでは折れにくいことから、一族の結束を説いた」）三矢の教え）
というものです.

三本の矢はなぜ1本の矢よりも折れにくいのか.
材料力学の知識があれば，3本にすると断面2次モーメントが大きくなるから　というわけです.

＜問3＞以下の(a)と(b)はどちらが断面２次モーメントIzが大きいでしょうか?
（即断で答えてください）

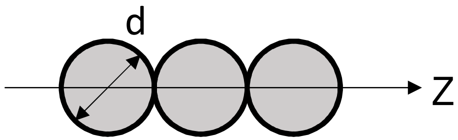


断面２次モーメントの定義以下の様になっており，

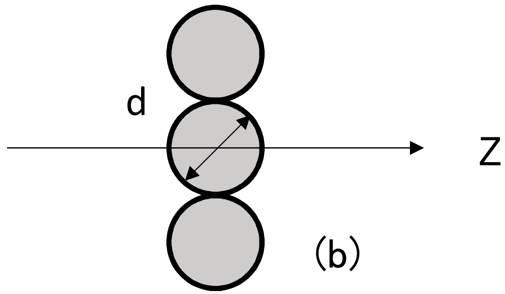
$$I_z = \int_A y^2 \, dA$$

Y^2の面積分なので，yが大きい(b)の方が大きくなります．
Yの２乗で利くので，中空にしても断面２次モーメントはあまり減少しません．
したがって，中空にした方が軽くなって都合が良い場合が多くあります．
（例）アルミニウム押出加工部材

<問4＞
1個の矢の直径をdとして，(a)，(b)のZ軸に関する断面２次モーメントを求めてください．



（a）



（b）

＜解答＞
１個なら

$Iz=\frac{\pi d^4}{64}$

(a)のように横に3個連ねた形状ならば，いずれの断面もZ軸は図心を通っているので，

$Iz \;=\; 3\times\frac{\pi d^4}{64}$

(b) Z軸は上下の2個の円の図心を通っていないので，
上下の円については平行軸の定理を使います．

$Iz \;=\frac{\pi d^4}{64} \;+\; 2\times(\frac{\pi d^4}{64} \;+d^2\cdot\pi d^2)$

（注）平行軸の定理　$I \;=\; I_0 \;+\; d^2\cdot A$　（テキスト　p90）

（復習） 平行軸の定理 （テキストp90）

Z軸ではなく，平行なZ_1軸の場合：　$I_{z1} = I_z + \boxed{a^2A}$ ← 軸をZからZ1にa平行移動した場合のI

これを加える

となる．図 6.19 に示すように断面 A の図心 C_0 を通る z 軸および y 軸に対して，z 軸に平行で a だけ離れた z_1 軸，また y 軸に平行に b だけ離れた y_1 軸の座標系において，z_1 軸に関する断面二次モーメント I_{z1} は，式 (6.15) の定義から，

$$I_{z1} = \int_A y_1^2\,dA = \int_A (a+y)^2\,dA$$

$$= a^2A + 2a\int_A y\,dA + \int_A y^2\,dA$$

となる．図心を通る z 軸に関する断面一次モーメントは

$$S = \int_A y\,dA = 0$$

であるから，

$$I_{z1} = \boxed{a^2A} + I_z \tag{6.22}$$

これを加える

同様に，I_{y1} は

$$I_{y1} = b^2A + I_y \tag{6.23}$$

となる．式 (6.21) と式 (6.23) の関係を**平行軸の定理** (parallel axis theorem) といい，平行な 2 つの軸の間の断面二次モーメントの関係を表す．

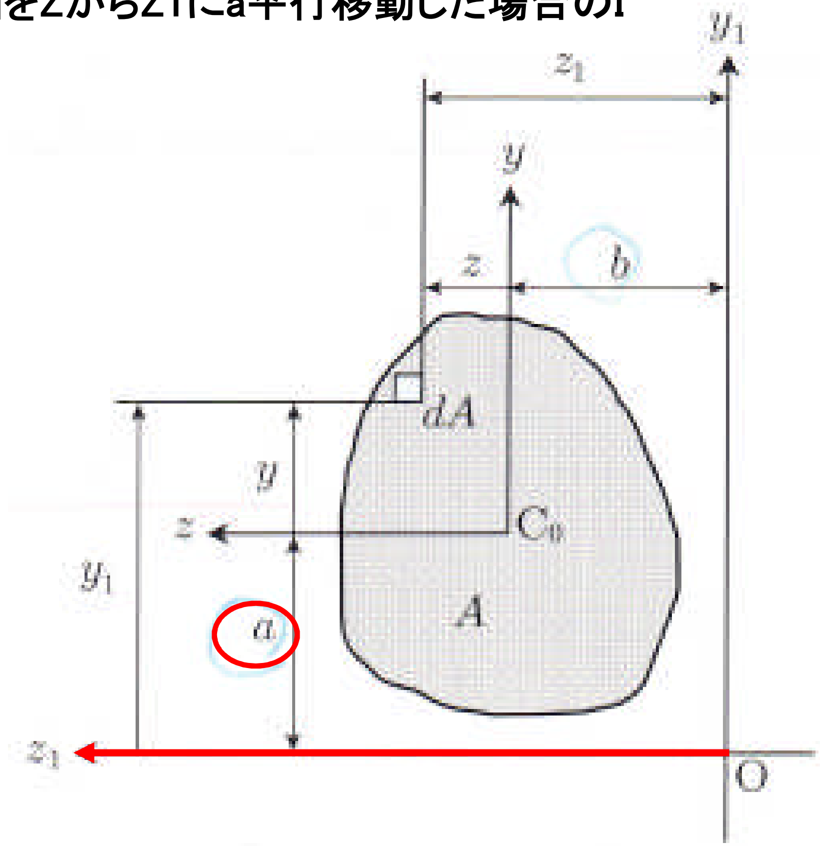


図 6.19　断面二次モーメント

曲げモーメントとせん断力の関係　（テキストp80）

- 曲げモーメント図の勾配がせん断力Qに等しい．
- せん断力が0となる位置で，曲げモーメントが最大（極値）となる．

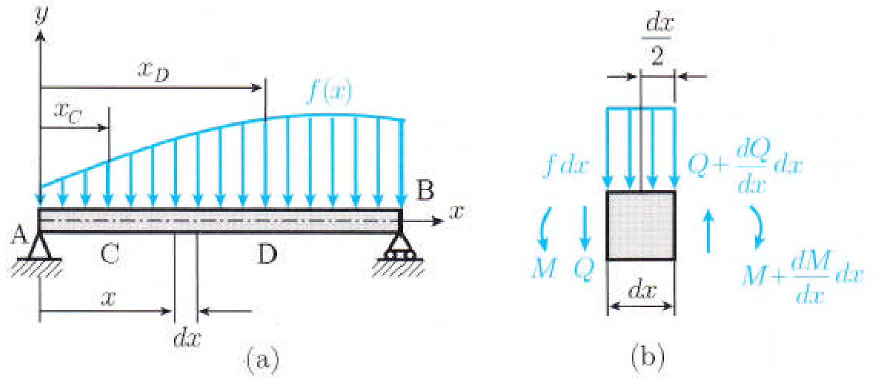


図 6.8　分布荷重を受けるはり

る．また，dx 部分の右側断面における力のモーメントのつり合いから，

$$M + \frac{dM}{dx}\,dx - M - Q\,dx - f\,dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

となるが，左辺の第 5 項は高次の微小量であるから省略すると

$$\frac{dM}{dx} = Q \qquad (6.6)$$

となる．これは曲げモーメント図の勾配が，せん断力に等しいことを示す．また，$Q = 0$ のとき，$dM/dx = 0$ であることから，せん断力がゼロとなる位置で曲げモーメントが最大値 (極値) をとることを意味する．また，式 (6.6) を x で微分して，式 (6.5) に代入すると

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = f \qquad (6.7)$$

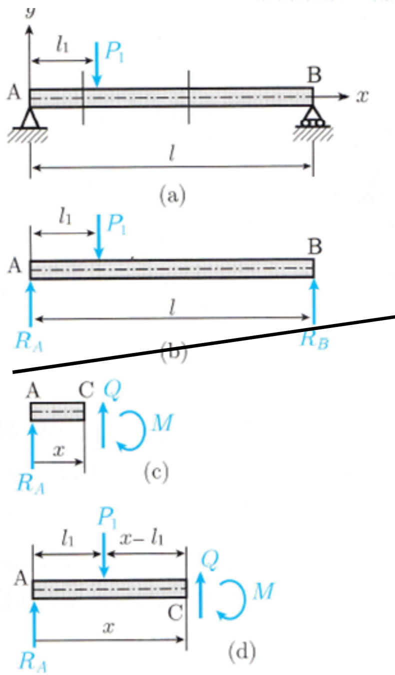


図 6.6　せん断力 Q と曲げモーメント M

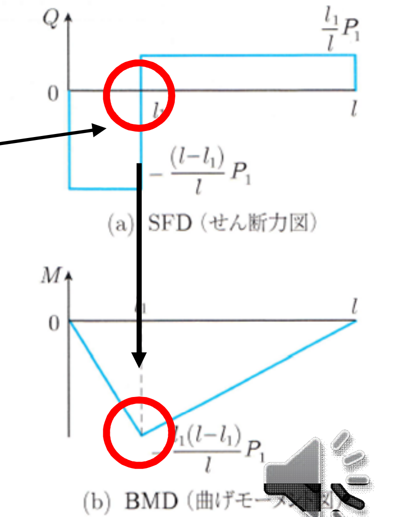


図 6.7　せん断力図と曲げモーメント図

- 曲げモーメント図の勾配がせん断力Qに等しい.
- せん断力が0となる位置で，曲げモーメントが最大（極値）となる.

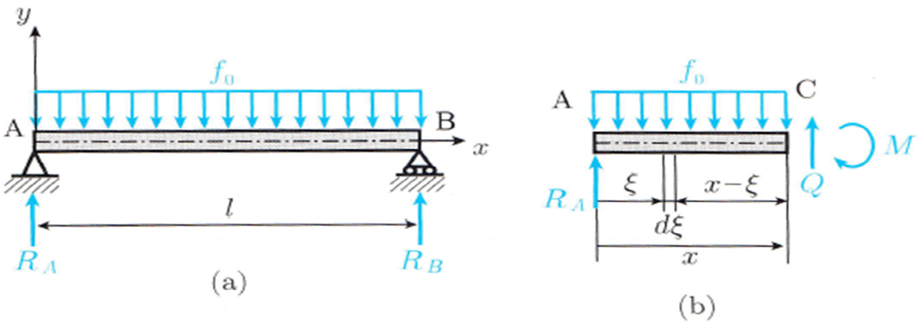


図6.9　等分布荷重を受ける単純支持はり

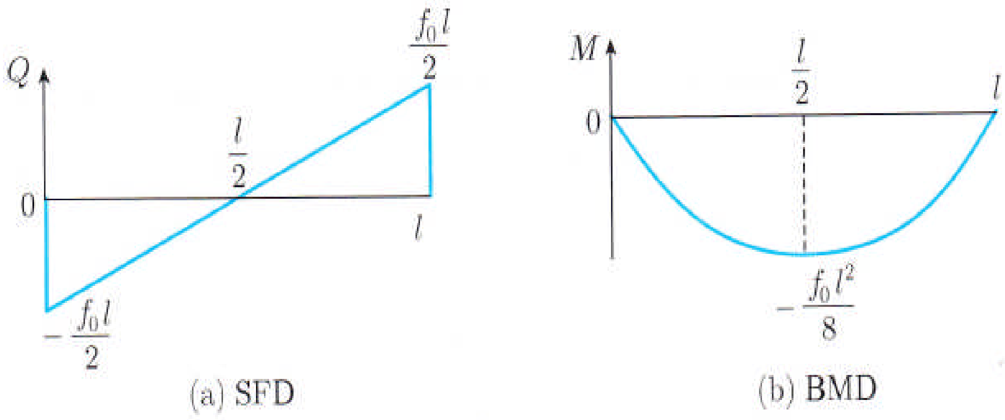
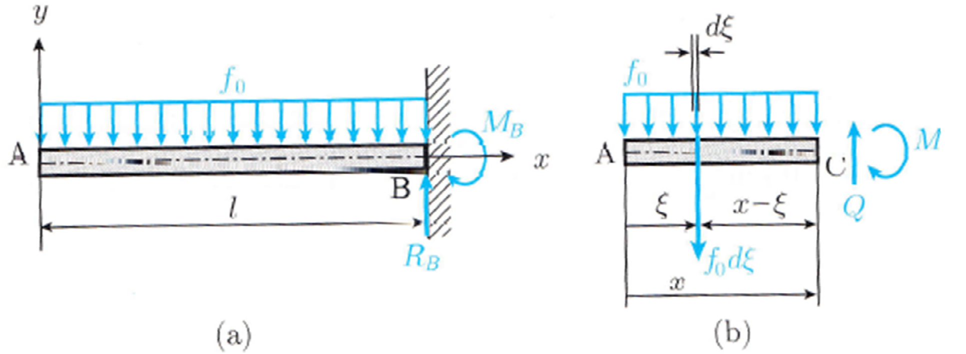


図 6.10　せん断力と曲げモーメント



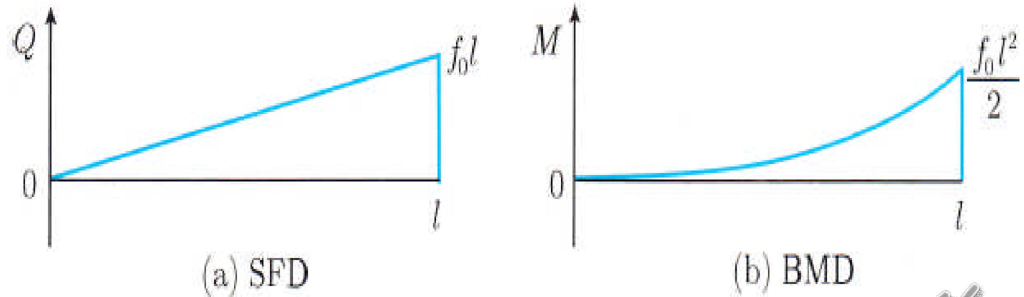


図 6.14　SFD と BMD